

collection Lycée – voie générale et technologique
série Accompagnement des programmes

Mathématiques

**cycle terminal de la série littéraire
option facultative**

Première

programme applicable à la rentrée 2001

Terminale

programme applicable à la rentrée 2002

Ministère de l'Éducation nationale
Direction de l'Enseignement scolaire

CE DOCUMENT A ÉTÉ RÉDIGÉ PAR LE GROUPE D'EXPERTS SUR LES PROGRAMMES SCOLAIRES DE MATHÉMATIQUES :

Pierre Arnoux,
professeur des universités, Institut de mathématiques de Luminy (CNRS) et université de la Méditerranée

Antoine Bodin,
professeur, expert de l'OCDE, spécialiste de l'évaluation des compétences en mathématiques

Françoise Cellier,
professeur, lycée Charlemagne de Paris

Philippe Clarou,
professeur, IUFM de Grenoble

Gilles Godefroy,
directeur de recherche, CNRS, université Paris-VI

André Laur,
professeur, lycée Emmanuel-Mounier de Grenoble

Jean-Paul Quelen,
professeur, lycée Jean-Monnet de Strasbourg

Jean Moussa,
inspecteur général de l'Éducation nationale

Claudine Robert,
présidente, professeur des universités, université Joseph-Fourier de Grenoble

Erick Roser,
IA-IPR, académie de Poitiers

Nicolas Rouche,
professeur émérite, Centre de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Belgique

Johan Yebbou,
professeur en CPGE, lycée Charlemagne de Paris

Consultante pour les technologies de l'information et de la communication

Anne Hirlimann,
experte auprès de la SDTICE (direction de la Technologie)

Coordination et suivi éditorial

Jérôme Giovendo,
bureau du contenu des enseignements (direction de l'Enseignement scolaire)

Maquette : Fabien Biglione

Maquette de couverture : Catherine Villoutreix

Mise en pages : Catherine Villoutreix/Michel Voillot

Suivi éditorial : Nicolas Gouny

© CNDP, 1^{er} trimestre 2002

ISBN : 2-240-00800-8

ISSN : 1624-5393

Sommaire

Préambule	4
Analyse – Classe de première	5
Choix des problèmes	5
Utilisation de la calculatrice et du tableur	5
Fonctions homographiques	5
Fonction trinôme du second degré	6
Approximation d'un pourcentage	6
Neuf exemples de problèmes	7
Analyse – Classe terminale	15
Suites	15
Fonctions usuelles	16
Fonction logarithme	18
Fonction exponentielle	20
Probabilités, statistique et combinatoire	23
Combinatoire en classe de première	23
Probabilités et statistique	24
Arithmétique – Classe terminale	28
Introduction	28
Cryptographie	29
Clés de contrôle	30
Géométrie – Classe de première	31
Géométrie plane	31
Construction et tracés (« à la règle et au compas »)	33
Nombres constructibles	40
Commensurabilité	41
Géométrie dans l'espace	41
Géométrie – Classe terminale	43
Nombre d'or et pentagone régulier	43
Perspective à point de fuite	49

Préambule

Ce document s'adresse en priorité aux professeurs enseignant l'option mathématiques en classes de première et terminale L. Il explicite les intentions du programme à travers de nombreux exemples qui pourront guider chaque enseignant dans la construction de son cours. Il en développe certains points : notions nouvelles (telles celles concernant la vision géométrique des nombres et les problèmes de construction) ou approches nouvelles (telles celles de l'analyse, de la fonction logarithme, de la combinatoire...). Certains exemples invitent à évoquer des problèmes marquants de l'histoire des mathématiques : ce pourra être l'occasion d'une réflexion commune à d'autres disciplines.

Ce document s'adresse aussi à tous les autres professeurs de mathématiques : en effet, les exemples proposés peuvent inspirer des activités dans d'autres séries ; par ailleurs, la lecture comparée des programmes de chaque série et de leurs documents d'accompagnement respectifs permet de mieux cerner la spécificité de chacune d'elles. Il importe que la communauté des enseignants de mathématiques garde une culture commune, quelle que soit la formation initiale de chacun : un tel document participe de cet objectif.

A

analyse – Classe de première

L'analyse peut être présentée à partir d'un petit nombre de situations soigneusement choisies : en cherchant à répondre aux questions qu'elles suscitent, on entraînera les élèves à comprendre puis à maîtriser les notions au programme. Certaines situations, ou problèmes, pourront être présentés dès le départ et utilisés tout au long du déroulement du cours.

Choix des problèmes

Neuf exemples sont proposés dans ce document. Chacun introduit une ou plusieurs fonctions d'un des types retenus par le programme ou à une combinaison simple de ces fonctions ; ils ont été développés pour montrer en quoi leur étude permet d'atteindre l'essentiel des objectifs du programme.

On pourra viser l'acquisition de quelques automatismes calculatoires, dans la mesure où ceux-ci libèrent la pensée pour une meilleure compréhension, mais une telle acquisition n'est pas un objectif de cette option. L'essentiel du temps sera consacré à la résolution des problèmes choisis et, à travers cette résolution, à la compréhension du concept fondamental de dérivation et des quelques applications prévues par le programme.

Pour les problèmes que l'enseignant aura choisi de traiter, on n'hésitera pas à confronter plusieurs méthodes, selon l'évolution de la classe et en fonction des concepts disponibles.

Utilisation de la calculatrice et du tableur

Calculatrices et tableurs ont été utilisés dans le cursus antérieur et le sont de façon importante en classe de première dans le programme obligatoire de mathématiques-informatique. Leur usage sera systématique pour représenter graphiquement les fonctions mises en place lors de l'étude d'un problème ou dresser des tableaux de valeurs. Ces représentations et ces tableaux pourront même servir de terrain expérimental pour amener de nouvelles questions ou conjecturer des réponses que le calcul et le raisonnement viendront ensuite justifier.

Calculatrices et tableurs permettent d'aborder des expressions de fonctions qui pourront paraître compliquées à l'élève sortant de la classe de seconde. Selon les questions envisagées, on pourra chercher à simplifier ou modifier l'écriture d'une expression. Cela sera vrai en particulier pour les fonctions polynômes et les fonctions homographiques.

Pour les fonctions polynômes, il pourra s'agir de la recherche guidée d'une forme factorisée mais aucune compétence n'est exigée en la matière. Pour les fonctions homographiques, il sera utile de savoir passer de l'écriture $\frac{ax+b}{cx+d}$ à une écriture du type $k + \frac{k'}{cx+d}$.

Fonctions homographiques

L'écriture $k + \frac{k'}{cx+d}$ donne des informations que les élèves devront savoir utiliser à bon escient. Cette écriture permet entre autres le calcul de la dérivée : la dérivée en x_0 de la fonction $x \mapsto 1/(cx+d)$ sera établie une fois pour toutes en revenant à la définition et le résultat sera par la suite utilisé librement par les élèves.

Elle met également en évidence le rôle particulier des droites d'équation ($x = -d/c$) et ($y = k$) dans la représentation graphique de la fonction. Aucun calcul de limite n'est demandé dans le programme (seule une notion intuitive de limite est utilisée pour la définition du nombre dérivé), et ce d'autant plus que lors de la résolution de problèmes, l'intervalle d'étude de la fonction se limite le plus souvent à un segment. Néanmoins, le travail fait en seconde sur la fonction inverse et celui fait ici sur les fonctions homographiques, appuyés par des représentations graphiques et des calculs sur tableur, pourront conduire à compléter les tableaux de variation par les limites mises intuitivement en évidence.

Ainsi, par exemple pour la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$, on aboutira à l'écriture $f(x) = 2 + \frac{-7}{x+3}$, dont on déduira facilement le tableau de variation avec les limites aux bornes :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$	2

On pourra aussi utiliser les mots « asymptotes » et « hyperbole », mais la connaissance de ces termes n'est pas exigible.

Il est à noter que l'étude du sens de variation n'exige pas ici le calcul de la fonction dérivée ; si celui-ci est effectué, ce sera pour répondre à d'autres questions, comme dans l'exemple 1 ci-après.

Fonction trinôme du second degré

Le libellé du programme incite à une démarche particulière sur le trinôme du second degré :

- à l'occasion d'exemples, étude des variations de fonctions du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$; mise en évidence des deux tableaux de variations possibles selon le signe de a et du rôle particulier du réel $x_0 = -b/2a$; représentations graphiques ;
- recherche des zéros de la fonction sous la forme $x_0 + h$ (on est alors ramené à une équation du type $h^2 = A$; les signes de a et de $f(x_0)$ fournissent des conditions d'existence de ces zéros).

La formule utilisant le discriminant n'est pas au programme, même si le rôle de celui-ci peut être mis en évidence à l'occasion de l'étude du signe de A ou de $f(x_0)$.

D'autres démarches sont envisageables et pourront venir plus naturellement au fil du travail de la classe, mais on veillera à limiter le temps consacré à ce type de fonctions. Comme indiqué dans le programme, on travaillera surtout sur des exemples numériques. Si l'étude du signe du trinôme s'avère utile (par exemple pour l'étude des variations d'une fonction polynôme du troisième degré), celle-ci s'appuiera avant tout sur la vision graphique de la parabole.

Approximation d'un pourcentage

Les exemples proposés et les commentaires du programme donnent de nombreuses pistes concernant l'introduction et les applications usuelles de la dérivation (on pourra aussi se reporter aux éléments fournis dans le document d'accompagnement de la classe de première S).

Le titre « application à l'approximation d'un pourcentage » est à rattacher au titre correspondant du programme de mathématiques-informatique « approximation linéaire dans le cas de faibles pourcentages » ; son traitement dans l'option devra donc être entrepris après l'étude de ce chapitre dans le programme obligatoire.

C'est le seul endroit où il est demandé d'évoquer la notion d'approximation affine liée à la dérivée ; celle-ci aura déjà pu être observée graphiquement avec la notion de tangente pour d'autres fonctions. Ce sera fait systématiquement ici pour les fonctions

$x \mapsto (1+x)^2$, $x \mapsto (1+x)^3$ et $x \mapsto (1+x)^{-1}$, que l'on dérivera en 0 et pour lesquelles on établira l'équation de la tangente à la courbe représentative au point d'abscisse 0 : l'approximation demandée s'en déduit immédiatement. On étendra le résultat au cas des fonctions $x \mapsto (1+x)^n$ pour $n < 10$ et on montrera la cohérence de ce résultat avec le développement de $(1+x)^n$: quand x est petit, les puissances x^2, x^3, \dots sont négligeables devant x .

Un prolongement naturel pourra être amené par des questions du type : à quelle hausse semestrielle constante correspond une hausse annuelle donnée et est-ce qu'une hausse de $x\%$ sur un an équivaut à deux hausses successives de $(x/2)\%$ par semestre (ou quatre hausses successives de $(x/4)\%$ par trimestre) ?

Cela revient à chercher une approximation affine en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

Ce travail pourrait permettre d'introduire la notation $(1+x)^{1/2}$, puis

$$\sqrt{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{1/4}.$$

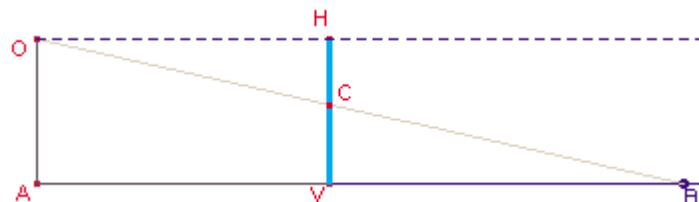
Neuf exemples de problèmes

1. Un bateau qui s'éloigne

(D'après Vers l'infini pas à pas, Approche heuristique de l'analyse, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1999.)

Blaise Pascal (1623-1662) observant l'éloignement d'un bateau à travers une vitre a remarqué que le point de la vitre où l'on voit le bateau n'atteindra jamais celui correspondant à un regard horizontal mais s'en « approchera toujours sans jamais y arriver ».

Le schéma suivant est une représentation de cette situation (en supposant la Terre plate). L'œil de l'observateur est en O ; il voit le bateau B s'éloigner sur (AV) à travers une vitre dressée verticalement en V. L'observateur voit, sur la vitre, l'horizon en H et l'image du bateau en C. On a $AO = 1,6$ m ; $AV = 2$ m ; $AB = x$.



- Calculer la hauteur du point C.
- Le bateau s'éloignant à la vitesse constante de $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, à quelle vitesse se déplace le point C, image du bateau sur la vitre ?

Indications :

La hauteur de C est $1,6\left(1 - \frac{2}{x}\right)$; la vitesse du bateau est $\frac{25}{3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $x = \frac{6+25t}{3}$

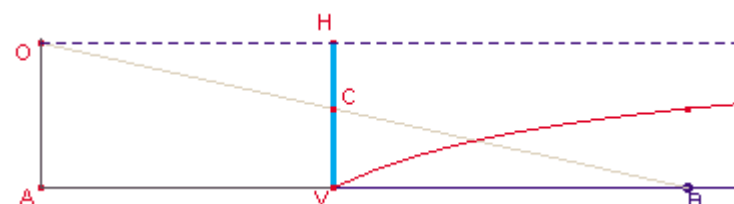
et la hauteur en fonction de t , notée h , est $h(t) = \frac{40t}{6+25t}$.

Pour un intervalle Δt , on obtient pour vitesse du point C :

$$\frac{h(t+\Delta t) - h(t)}{\Delta t} = \frac{240}{(6+25(t+\Delta t))(6+25t)},$$

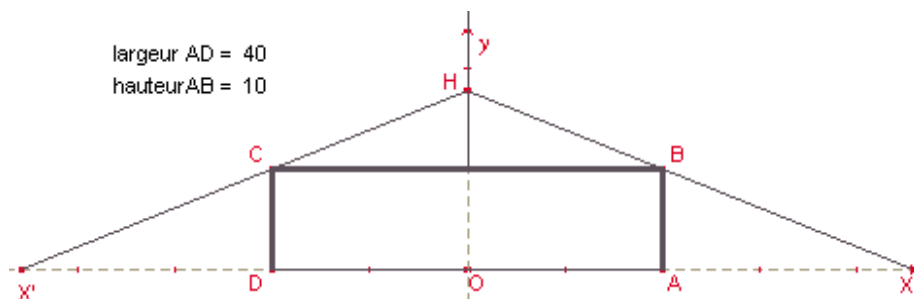
et pour vitesse instantanée à l'instant t , $v(t) = \frac{240}{(6+25t)^2}$.

La représentation graphique de la hauteur $y = 1,6\left(1 - \frac{2}{x}\right)$ dans un repère d'origine A est la suivante :



2. L'ombre d'un gyrophare

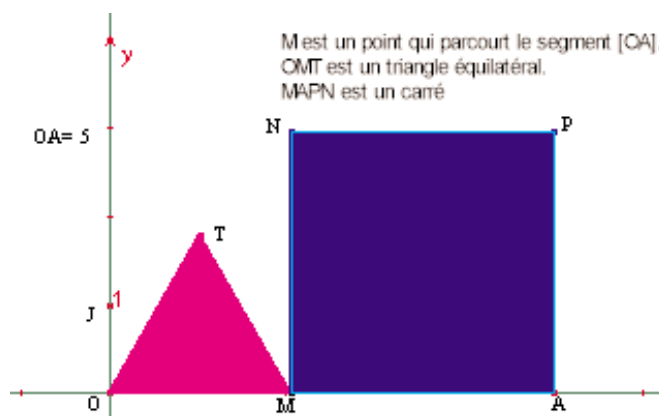
Dans un aérodrome, un gyrophare est placé au-dessus d'un hangar cylindrique de 10 m de haut et de base circulaire de 40 m de diamètre. Le cône d'ombre est un cercle de rayon x et on veut déterminer la hauteur h du gyrophare (au-dessus du sol) en fonction de ce rayon.



- Faire le lien entre la situation décrite et le schéma ci-dessus.
- En considérant les deux triangles semblables XAB et XOH, montrer que
$$h(x) = \frac{10x}{x - 20}.$$
- En considérant les triangles semblables BIH et XAB, montrer que
$$h(x) = \frac{200}{x - 20} + 10.$$
- Vérifier par le calcul que les deux expressions sont égales, pour tout $x > 20$.
- Établir le tableau de variation de h en fonction de x .

3. La plus petite aire

Soit un segment [OA] de longueur donnée (par exemple 10) et M un point de ce segment. Du même côté de [OA], on construit le triangle équilatéral OTM et le carré AMNP. On pose $OM = x$.

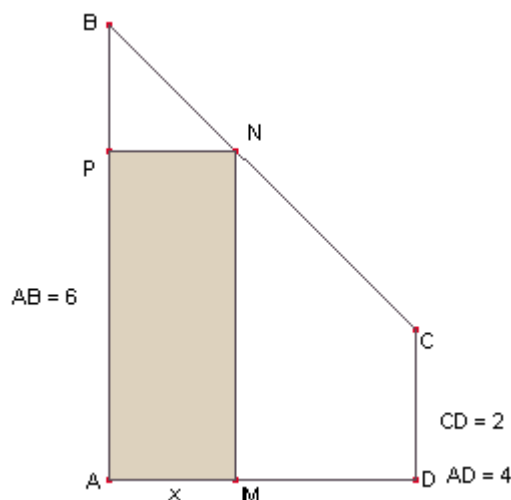


- Donner l'expression et la représentation graphique de l'aire du triangle OTM en fonction de x .
- Donner l'expression et la représentation graphique de l'aire du carré AMNP en fonction de x .
- Étudier les variations de la somme des aires du triangle et du carré en fonction de x . Pour quelle valeur de x cette aire est-elle minimum ?

Remarque – On peut envisager un triangle OTM rectangle isocèle, ou bien un deuxième carré OMTU. Cette situation conduit à étudier d'abord deux fonctions trinômes avec des coefficients de x^2 de signes différents, puis la somme de ces deux fonctions.

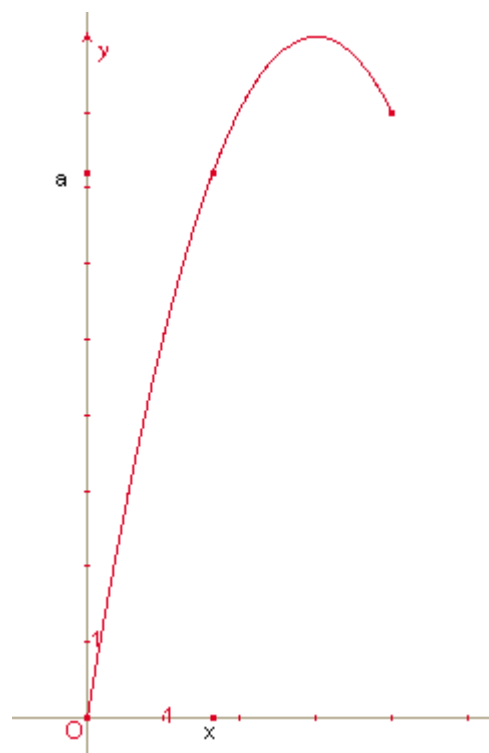
4. Aire maximum

Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D tel que $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm et $CD = 2$ cm. Un point N parcourt le segment [BC]; on construit le rectangle AMNP avec P sur [AB] et M sur [AD]. Exprimer l'aire du rectangle AMNP en fonction de AM et représenter graphiquement cette aire en fonction de AM. Pour quelle valeur de AM cette aire est-elle maximum ?



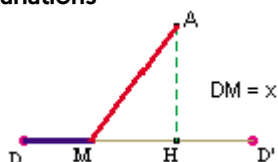
On représente ci-contre la courbe obtenue.

Remarque – On peut séparer la classe en groupes et faire cet exercice avec différentes valeurs de a et b , ($b > a$), avec $CD = a$, $AD = b$, $AB = a + b$, et vérifier alors que le maximum est toujours atteint quand P est au milieu de [AB], puis le démontrer.



5. Temps de parcours

Variations



Un point A se situe à 3 km d'un segment $[DD']$ de longueur 6 km et sa projection orthogonale sur $[DD']$ se situe en H à 4 km de D (et à 2 km de D').

- Sans aucun calcul, dresser le tableau donnant les variations de la longueur AM en fonction de la longueur DM.
- Exprimer analytiquement AM en fonction de DM et représenter graphiquement cette fonction sur la calculatrice.

Parcours à VTT

Un vététiste part de D pour arriver en A situé au milieu d'une grande prairie. Il peut emprunter un chemin carrossable $[DD']$ rectiligne de 6 km de long. Le point A est distant de 3 km de $[DD']$ et $DH = 4$ km et $HD' = 2$ km. Quel itinéraire doit-il choisir pour aller le plus rapidement possible de D à A dans les cas suivants ?

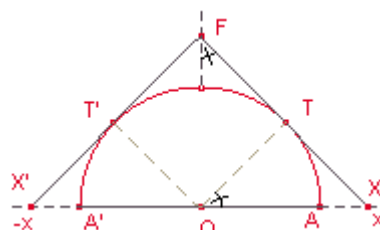
- il se déplace à la même vitesse v (par exemple 15 km.h^{-1}) sur le chemin et dans la prairie;
- il se déplace à la vitesse v_1 sur le chemin, à la vitesse v_2 dans la prairie, et $v_1 = 2v_2$ (avec par exemple $v_2 = 10 \text{ km.h}^{-1}$).

Indications: si les vitesses v_1 et v_2 sont exprimées en km.h^{-1} et si on pose $DM = x$, le temps t (en heure) mis par le vététiste pour aller de D à A vérifie $t = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(4-x)^2 + 9}}{v_2}$.

Le problème est difficile : une approche calculatoire (avec tableur) pourra être proposée ; sa résolution exacte exige l'outil « dérivée » et une relative aisance dans les calculs.

6. Histoires de toit

I. Un toit s'appuie sur une voûte en demi-cercle de rayon r , comme l'indique la figure ci-contre. Quelle doit être la hauteur du faite pour que les deux pans du toit forment un angle droit ? Situer le point de contact de chaque pan avec la voûte.

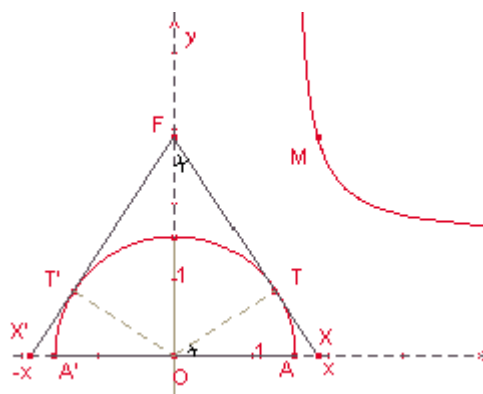


Par de simples considérations géométriques on trouve $h = x = r\sqrt{2}$ et les coordonnées de T sont $(r\sqrt{2}/2; r\sqrt{2}/2)$.

Remarque – On peut reprendre ces questions dans le cas d'un toit formant un angle de 60° ou de 120° .

II. Plus généralement, déterminer l'expression donnant la hauteur h en fonction de la longueur OX notée x . Construire une représentation graphique de la fonction $x \mapsto h$.

L'expression de h en fonction de x s'obtient assez simplement en considérant les triangles rectangles semblables FTO et OTX. On trouve $h = \frac{rx}{\sqrt{x^2 - r^2}}$. Bien que l'étude de ce



type de fonction soit en

dehors du programme, la calculatrice permet une représentation graphique aisée ; celle-ci peut aussi se construire point par point à partir du dessin ; l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique sera alors bienvenue (le dessin met en évidence deux droites asymptotes dont l'interprétation géométrique est évidente).

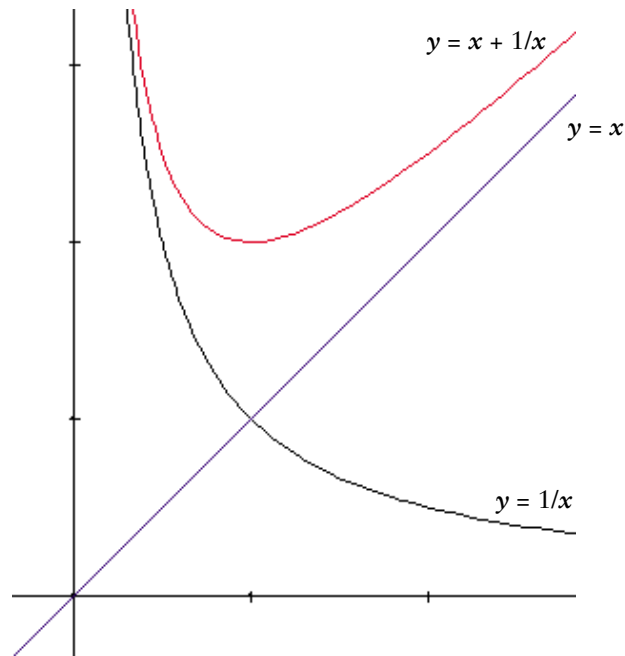
III. (*Approche géométrique de la tangente.*) La courbe (\mathcal{C}) d'équation $y = ax^2$ (a désignant un réel non nul, par exemple $a = 0,5$) est appelée parabole. Soit T un point de l'axe des ordonnées ayant une ordonnée t de signe contraire à celui de a (par exemple $t = -4$). On fait pivoter une droite Δ autour du point T et on observe l'intersection de Δ et (\mathcal{C}) : faire des essais (l'équation de Δ étant de la forme $y = mx - 4$, on essaiera avec des valeurs entières de m : 0, 1, 2, 3...).

On met ainsi en évidence deux cas où la droite Δ est « tangente » à (\mathcal{C}). Le milieu T' des points de contact C et C' des deux tangentes à la parabole semble alors lié au point T. L'objectif est alors de prouver la propriété conjecturée. Après généralisation, on en déduit un moyen simple pour construire les tangentes à une parabole passant par un point donné de son axe de symétrie.

Indications : on pourra d'abord chercher les abscisses des points d'intersection de (\mathcal{C}) et Δ dans les cas $m = 3$ (on aboutit à une équation de la forme $(x - 3)^2 = 1$), puis $m = 4$... Pour m quelconque, ces calculs préliminaires amènent à l'équation $(x - m)^2 = m^2 - 8$. Il y a tangence quand il y a une seule solution, donc quand $m^2 = 8$. On peut séparer la classe en groupes et faire cet exercice avec différentes valeurs de t (voire de a). Chaque groupe aboutit au même résultat : le point T' est symétrique de T par rapport à O.

Remarque – On ne manquera pas par la suite de vérifier que l'on obtient bien la même tangente en utilisant la dérivée.

IV. Un toit, dont les deux pans sont symétriques par rapport à la verticale issue du faite du toit est soutenu par une voûte parabolique (voir la figure page suivante). La distance AA' et la hauteur OH sont fixées (par exemple AA' = 4 et OH = 2). Déterminer



8. Grand volume, petite surface

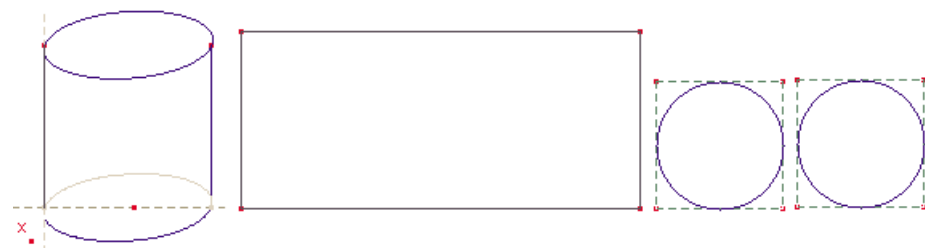
I. Rangement

On veut fabriquer une boîte parallélépipédique de base carrée et de volume donné. Quelles dimensions lui donner pour utiliser le moins de bois possible?

Indications : on pourra démarrer avec un volume de $1\,000\text{ dm}^3$. En notant x le côté du carré de base, on exprime la hauteur h en fonction de x , puis l'aire totale de la surface de la boîte en fonction de x . Le minimum de cette aire est atteint quand la boîte est cubique.

On pourra proposer de nouveaux calculs à partir de volumes différents, voire travailler dans le cas général, et parler à cette occasion de racine cubique.

II. Boîte de conserve

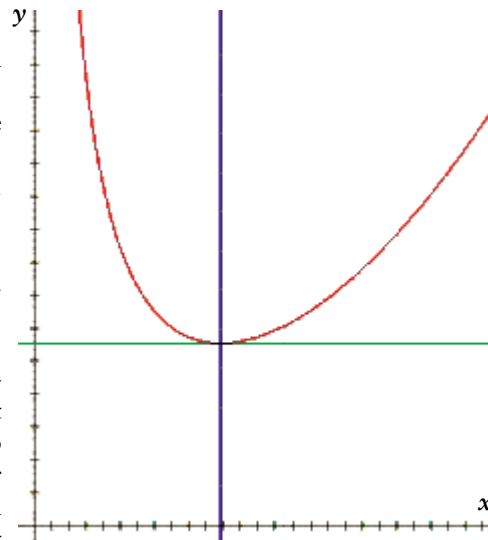


Une boîte de conserve de $1\,000\text{ cm}^3$ est un cylindre de révolution de diamètre d et de hauteur h . On veut minimiser le prix de revient de la tôle servant à la fabrication de cette boîte. Pour cela on va minimiser la surface de tôle utilisée, à savoir la surface latérale et celle des deux carrés dans lesquels on découpe les deux disques constituant le fond et le dessus de la boîte.

Indications :

- Exprimer la hauteur h en fonction du diamètre d .
- Exprimer l'aire A de la surface de tôle en fonction du diamètre d .
- Représenter graphiquement l'aire A en fonction de d .
- Conjecturer un minimum.
- Déterminer le minimum à l'aide de la dérivée.

Remarque – On peut chercher à minimiser la surface de tôle effectivement utilisée; les calculs sont alors beaucoup plus délicats (ils obligent en particulier à l'emploi d'une racine cubique); on remarquera que, dans ce cas-là, le coût minimum est atteint quand la hauteur de la boîte est égale à son diamètre.



L'axe des y est gradué de 100 en 100.

Sur l'axe des x , une graduation correspond à 1 unité.

9. Variations de vitesse

(D'après Vers l'infini pas à pas, Approche heuristique de l'analyse, De Boeck-Wesmael, Bruxelles, 1999.)

Un monte-charge s'élève d'une hauteur de 3 m en accélérant pendant 3 secondes puis en décélérant pendant 3 secondes. Il part du repos et il s'arrête donc à 3 m de haut au bout de 6 secondes.

Représenter graphiquement la hauteur atteinte par le monte-charge en fonction du temps dans les deux cas suivants :

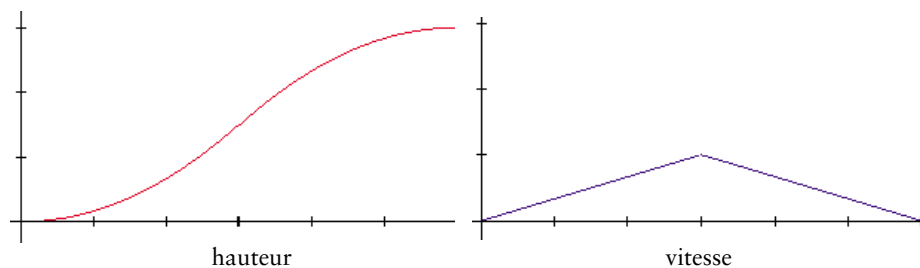
- Son accélération et sa décélération sont égales à une même constante.
- La hauteur $h(t)$ atteinte au bout du temps t s'exprime par un polynôme du troisième degré $h(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Dans chacun des cas, calculer la vitesse au bout de 3 secondes, au bout de t secondes; préciser si le monte-charge s'arrête en douceur et si le mouvement change brusquement après 3 secondes.

Indications: ce type de problème est difficile; il serait néanmoins regrettable de l'exclure *a priori* en raison de sa complexité. Il permet l'introduction des notions d'accélération et de décélération (à présenter de façon intuitive comme la « vitesse » de la vitesse). Il permet également de mettre en œuvre les formules de dérivation sous un angle nouveau (inutile pour autant d'utiliser le terme de primitive).

On obtient les résultats suivants.

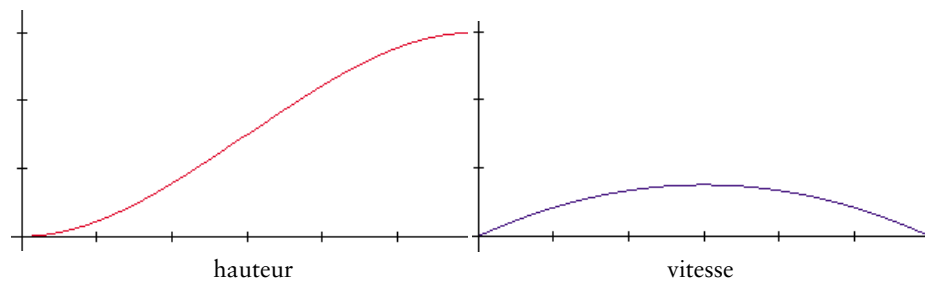
$$1^{\text{er}} \text{ cas: } h(t) = \frac{1}{6}t^2 \text{ pour } 0 \leq t \leq 3 \text{ et } h(t) = 3 - \frac{1}{6}(t-6)^2 \text{ pour } 3 \leq t \leq 6.$$

La vitesse est donnée par $v(t) = \frac{1}{3}t$ pour $0 \leq t \leq 3$ et par $v(t) = -\frac{1}{3}(t-6)$ pour $3 \leq t \leq 6$.



L'accélération passe brusquement de $1/3$ à $-1/3$.

2^e cas : la hauteur est nulle pour $t = 0$ donc $d = 0$; elle vaut 3 pour $t = 6$ d'où $3 = 216a + 36b + 6c$; la vitesse (qui s'obtient en dérivant) $v(t) = 3at^2 + 2bt + c$ est nulle pour $t = 0$ et pour $t = 6$. On obtient donc $h(t) = -\frac{1}{36}t^3 + \frac{1}{4}t^2$ et $v(t) = -\frac{1}{12}t^2 + \frac{1}{2}t$.



L'accélération passe linéairement de $1/2$ à $-1/2$.

A

analyse – Classe terminale

Suites

On pourra s'inspirer des exemples fournis dans le document d'accompagnement de la classe de première S (on y trouvera en particulier des exemples de suites provenant de la géométrie).

On donnera des exemples de suites définies par récurrence : ceux-ci compléteront ceux qui auront déjà été présentés en classe de première (programme obligatoire) ; pour le calcul des premiers termes, on entretiendra l'habitude du tableur. En dehors du cas des suites arithmétiques ou géométriques et des sommes de k de leurs termes consécutifs, aucune recherche de l'expression explicite du n -ième terme en fonction de n n'est demandée. La question de l'identification entre deux suites (l'une définie par récurrence, l'autre par son terme de rang n en fonction de n) pourra néanmoins être posée ; on admettra pour ce faire que deux suites ayant même premier terme et même relation de récurrence sont identiques (il s'agit là d'une application du principe du raisonnement par récurrence, mais aucune difficulté théorique ne sera soulevée).

On en restera le plus souvent à des récurrences d'ordre 1. À titre d'exemple, on pourra présenter une relation de récurrence d'ordre 2, telle celle intervenant dans les suites de Fibonacci ; le cas échéant, on fera expérimentalement le lien avec le nombre d'or (en cherchant une suite géométrique qui soit aussi de Fibonacci, ou en observant les quotients de deux termes successifs d'une suite de Fibonacci).

On introduira quelques exemples de suites finies, à prolonger « logiquement », c'est-à-dire en définissant une relation soit du type $u_{n+1} = f(u_n)$, soit du type $u_n = f(n)$ permettant sa reconstruction ; outre un aspect ludique, le problème mathématique sous-jacent (à savoir, étant donnée une suite, existe-t-il un moyen de la programmer) a donné lieu à des résultats nombreux et profonds. Ici, on soulignera plutôt l'entraînement au raisonnement inductif et la mise en jeu des capacités d'invention que la recherche de tels exemples implique. Ce type d'exemples pourrait s'inscrire dans des exercices analogues à celui qui suit.

Transmission de suites

Un élève A dispose des suites de nombres suivantes :

- (a) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49,
- (b) 1, 4, 9, 25, 36, 49, 64,
- (c) 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5,
- (d) 1, 2, 6, 24, 120, 720,
- (e) 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0,
- (f) -2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256,
- (g) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
- (h) 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1,
- (i) 3, 9, 81, 65, 61, 37,
- (j) 1, 7, 3, 2, 0, 5, 0, 8, 0, 7, 5, 7
- (k) 1, 11, 21, 1211, 11 12 21, 31 21 11

L'élève A doit transmettre chacune d'elles à un élève B par un procédé autre que la recopie (par exemple : la première suite est la suite des vingt-cinq premiers nombres impairs écrite par ordre croissant). Est-ce possible ?

Indications: il est difficile de détecter une régularité dans la suite (e). Une transmission possible pourrait être: une suite de vingt-neuf 0 ou 1, les 1 étant placés aux positions 2, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 23 et 26. On peut aussi calculer le nombre entier dont la suite donnée est l'écriture en base 2.

Pour la suite (j), l'existence d'un moyen autre que la recopie est difficile, sauf à remarquer qu'il s'agit des premiers chiffres du développement décimal de $\sqrt{3}$.

Pour la suite (i), on pourra découvrir que chaque terme est la somme des carrés des « chiffres » du terme qui précède.

On s'appuiera sur l'expérimentation calculatoire et géométrique et sur l'intuition pour aborder la notion de limite d'une suite (cf. exemples de suites dans l'annexe 3 du document d'accompagnement de la classe de première S). On utilisera la notation usuelle $\lim u_n$.

On pourra en rester aux limites des suites arithmétiques ou géométriques et à celles qui s'en déduisent immédiatement par le calcul (par exemple, limite de la somme des termes d'une suite géométrique convergente). Le calcul permet ainsi de confirmer le résultat éventuellement perçu de façon intuitive (cf. exemples dans l'annexe 3 du document de première S; suites présentes dans les paradoxes de Zénon d'Élée; valeur d'un développement décimal périodique; aire sous la parabole ci-dessous...).

Pour les suites géométriques à raison positive, l'expérimentation sur tableur pourra être motivée par la recherche de l'entier n tel que $u_n < u_0/2$ ou $u_n > 2u_0$ ($u_0 > 0$) et la comparaison de plusieurs suites à ce propos.

Fonctions usuelles

On entretiendra les acquis de la classe de première sur les fonctions polynômes de degré au plus 3, homographiques ou du type \sqrt{u} , avec u polynôme de degré au plus 2, à travers l'étude de nouveaux problèmes.

Pour motiver l'introduction du logarithme, on pourra envisager un problème simple de quadrature, tel celui qui est exposé dans l'encadré ci-dessous.

Aire sous la parabole

La parabole ci-dessous représente la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 4$. L'objectif est de calculer l'aire sous l'arche de parabole hachurée ci-contre.

1^{re} méthode (méthode d'Archimède, par triangulations successives)

1^{re} étape: on calcule d'abord l'aire cumulée des deux triangles AOS et A'OS (égale à $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bh = 8$ avec $b = OS = 4$ et $h = 2OA = 4$).

2^e étape: on ajoute ensuite les 4 triangles A'T'm', I'm'S, SIm, ImA (obtenus en coupant en deux chacun des segments [OA] et [OA']; ces 4 triangles ont une hauteur commune égale à $\frac{1}{4}AA'$ et une même base Im de longueur égale

à $\frac{1}{4}OS$; leur aire cumulée est celle d'un triangle de hauteur AA' et de base $\frac{1}{4}OS$;

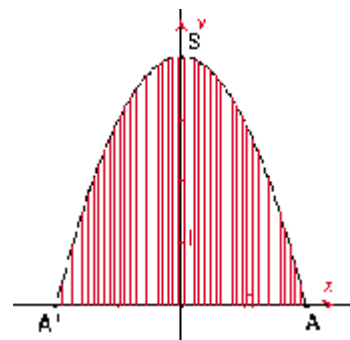
elle est donc égale à $\frac{1}{4}\mathcal{A}$.

3^e étape: à l'étape suivante (à droite ci-après), on ajoute des triangles dont l'aire cumulée équivaut à celle d'un triangle de hauteur AA' et de base $\frac{1}{16}OS$; elle est donc égale à $\left(\frac{1}{4}\right)\mathcal{A}$.

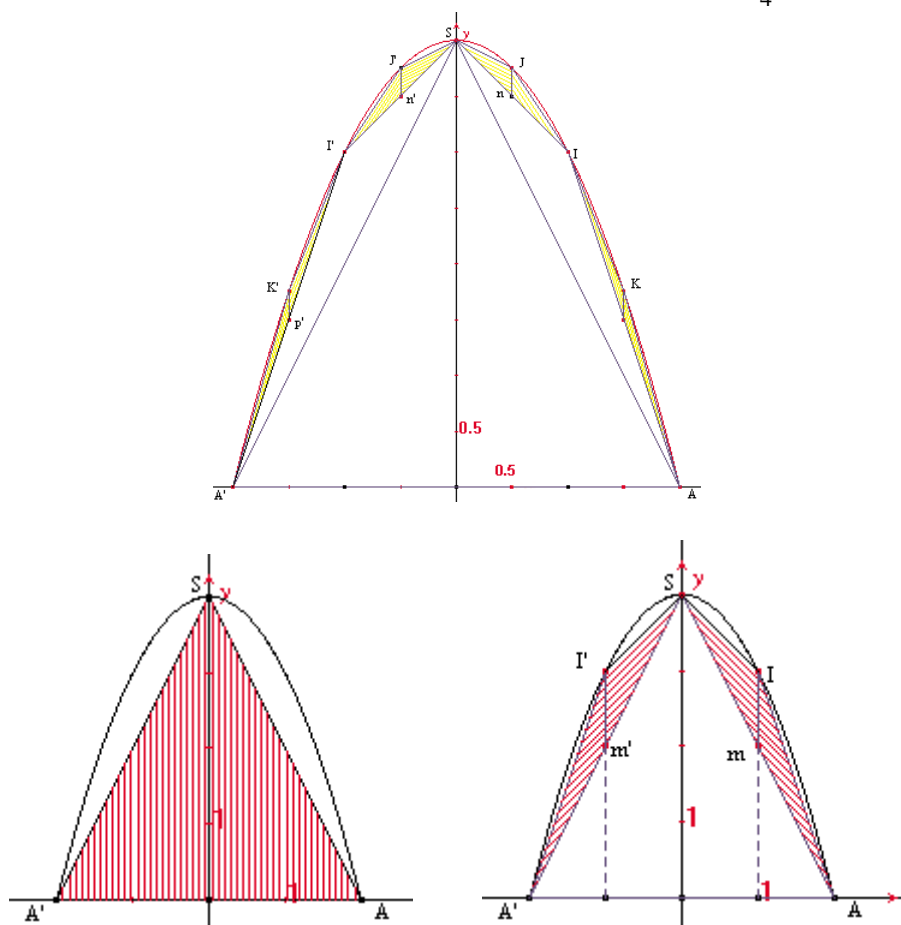
À chaque étape, on rajoute ainsi des triangles dont l'aire totale est le quart de l'aire totale des triangles rajoutés à l'étape précédente.

Pourquoi la base est-elle ainsi à chaque fois divisée par 4?

À la première étape, la base vaut OS . À l'étape suivante, en posant $a = 0$ et $b = 2$, la base vaut $f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{1}{4}(a-b)^2$. Et ainsi de suite...



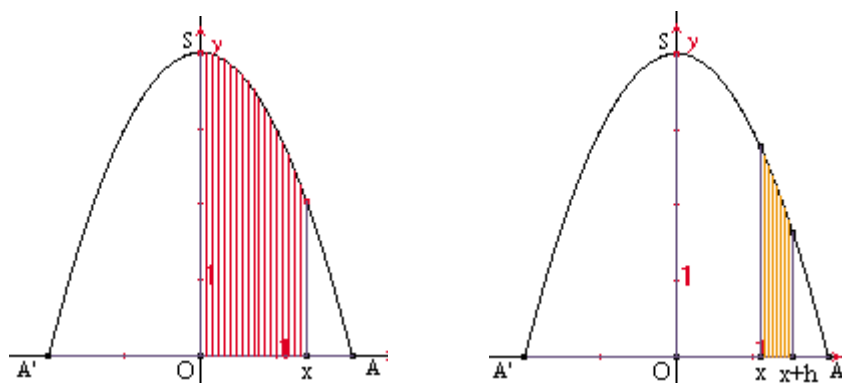
L'aire totale de l'arche de la parabole vaut donc $\mathcal{A} \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right) = \mathcal{A} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$.



2^e méthode : en utilisant la fonction aire

Définir la fonction aire $A(x)$ pour la demi-arche de droite; observer la tranche d'aire entre a et $a + b$ et montrer que $A'(a) = f(a)$.

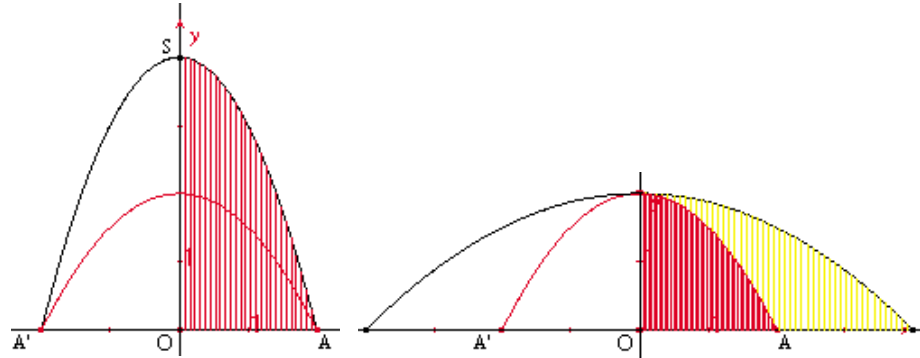
On cherche la fonction A dont la dérivée soit f et telle que $A(0) = 0$. Soit $A(x) = -\frac{x^3}{3} + 4x$.
 $A(2) = 16/3$, d'où l'aire cherchée: $32/3$.



Prolongement

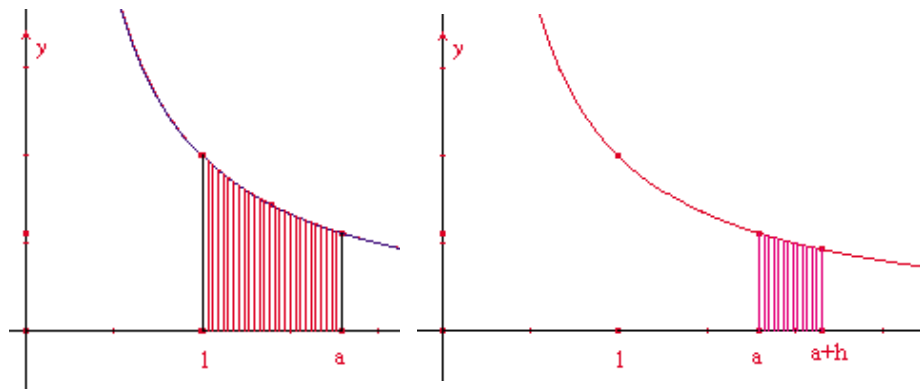
Que devient l'aire si on déforme l'arche de parabole en modifiant une seule dimension ? Dans le dessin ci-dessous, on « écrase » d'abord la parabole : les ordonnées sont toutes divisées par 2 ; la nouvelle aire (sous la courbe rouge) est donc divisée par 2 ; le résultat pourra être calculé dans le cas d'un rectangle puis admis dans le cas de la parabole. On « tire » ensuite la parabole vers la droite et la gauche : les abscisses sont multipliées par 2 ; l'aire sous la parabole rouge est donc multipliée par 2 ; l'aire finale (en jaune) est alors égale à l'aire initiale.

(Cette méthode sera réutilisée pour obtenir la relation fonctionnelle des logarithmes.)



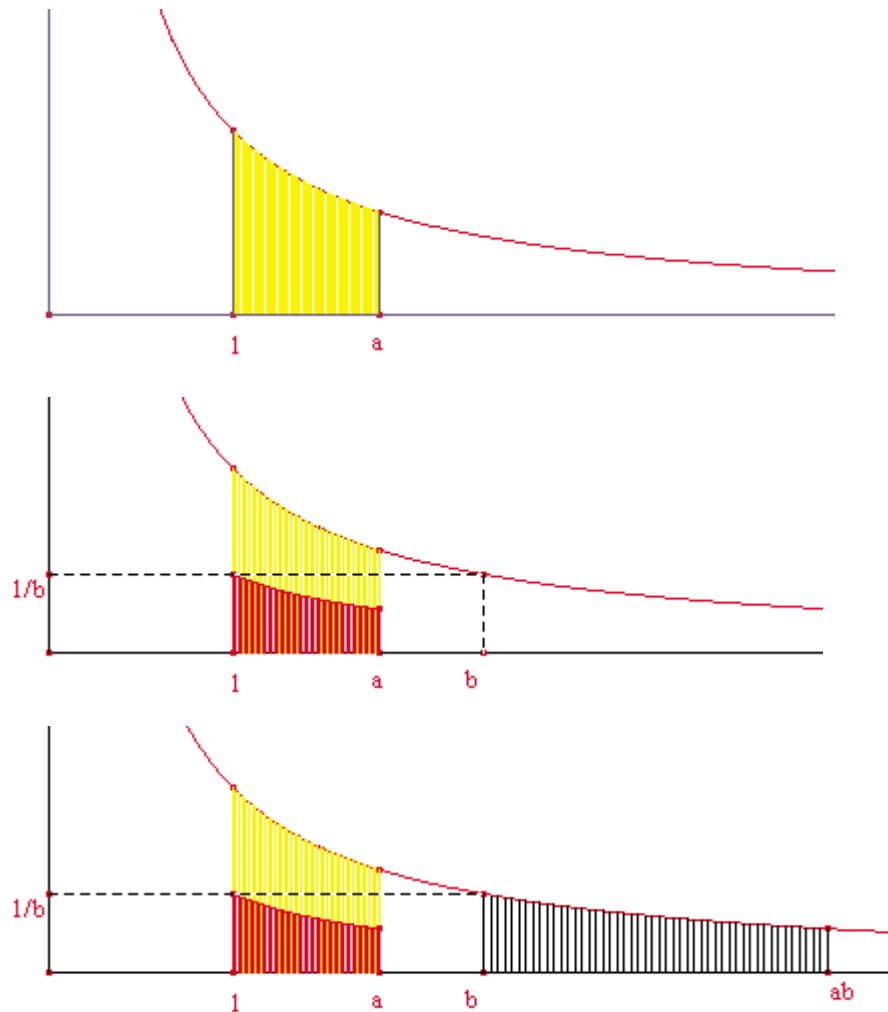
Fonction logarithme

Le programme suggère d'introduire la fonction logarithme par quadrature de l'hyperbole. On s'intéresse donc à l'aire sous l'hyperbole représentative de la fonction $x \mapsto 1/x$ à partir de la droite ($x = 1$) : l'aire sera comptée positivement vers la droite et négativement vers la gauche. La fonction aire ainsi définie est évidemment croissante. On montre (ou on admet en se référant au cas de la parabole si celui-ci a été traité) que cette fonction aire a pour dérivée $x \mapsto 1/x$.



On pourra chercher une méthode de calcul approché de valeurs de \ln (pour $\ln 2$ par exemple), mais on privilégiera ici l'utilisation de la calculatrice. Cette dernière donnera une représentation graphique de \ln ; on pourra lui associer la recherche de tangentes aux points d'abscisse 1, 2... On sera ainsi amené à s'intéresser à l'allure de la courbe de \ln quand x devient très grand (ceci pourra préparer la question de la limite de \ln en $+\infty$). La calculatrice permettra aussi une première approche de la valeur pour laquelle l'aire vaut 1.

Pour la mise en place de la relation fondamentale $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, on pourra s'appuyer sur la définition géométrique précédente en montrant que l'aire sous l'hyperbole entre les droites ($x = 1$) et ($x = a$) (en jaune sur la première figure ci-après) est égale à l'aire sous l'hyperbole entre les droites ($x = b$) et ($x = ab$) (en vert sur la troisième figure), en choisissant $b > a > 1$. La deuxième figure montre l'étape intermédiaire – division des ordonnées et donc aussi de l'aire par b – avant la multiplication des abscisses et donc aussi de l'aire par b .



On en tire $\ln(ab) - \ln(b) = \ln(a)$. Cette nouvelle fonction transforme donc les produits en sommes, puis les quotients en différences, les puissances n -ièmes en multiplications par n , les racines n -ièmes en divisions par n , etc. Elle transforme aussi les suites géométriques en suites arithmétiques. On pourra souligner l'importance historique de cette relation.

Cette relation (avec $\ln(2^n)$) permettra aussi de conclure sur la limite de \ln en $+\infty$ et donc aussi en 0.

Des fonctions du type $k \cdot \ln$ ou du type $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ seront aussi présentées. La définition graphique adoptée pour \ln (aire sous la courbe de $x \mapsto 1/x$) s'étend immédiatement à la fonction $x \mapsto \ln(x - \alpha)$ (aire sous la courbe de $x \mapsto 1/(x - \alpha)$) et donne, si besoin est, la dérivée de cette nouvelle fonction.

Mention sera faite de la fonction logarithme décimal, qu'on pourra illustrer par les exemples qui suivent (voir aussi la loi de Benford dans le paragraphe concernant les probabilités).

Exemple 1 : pH d'une solution aqueuse

On mesure l'acidité d'une solution en évaluant sa concentration en ions H_3O^+ ; les variations de cette concentration étant grandes, on utilise le logarithme de cette concentration.

De façon plus précise, on définit le pH par la formule $\text{pH} = -\log_{10} [\text{H}_3\text{O}^+]$, où $[\text{H}_3\text{O}^+]$ est le nombre de moles d'ions H_3O^+ par litre de solution.

Si la solution est neutre, le pH vaut 7.

Si la solution est acide, $\text{pH} < 7$; par contre si la solution est basique, $\text{pH} > 7$.

**Exemple 2: La loi de Weber-Fechner,
la sensation croît comme le logarithme de l'excitation**

Exemple: le cas des décibels

Le niveau sonore S (c'est la *sensation*) d'un son d'intensité I (c'est l'*excitation*) est donné (en *décibels*) par $S = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$, où I_0 est l'intensité de seuil d'audibilité pour l'oreille humaine:

- une musique douce correspond à 50 décibels (et donc à une intensité I cent mille fois plus grande que l'intensité I_0 du seuil d'audition);
- une rue bruyante à 80 décibels;
- un réacteur d'avion à 10 m à 120 décibels;
- pour faire tomber un niveau sonore de 90 décibels (seuil à partir duquel il y a danger pour l'oreille humaine) à 50 décibels, il faut diviser l'intensité par dix mille!

Exemple 3: Échelle de Richter

La magnitude M d'un séisme est souvent mesurée par le logarithme décimal de l'amplitude maximale d'une onde dite onde de surface L , mesurée en micromètres, à 100 km de l'épicentre: $M = \log_{10} (L/I_0)$. Ainsi, une amplitude de 1 mm à 100 km de l'épicentre est mesurée par l'indice 3 sur l'échelle de Richter (ce qui signifie que $M = 3$). Cette magnitude caractérise l'énergie libérée à l'épicentre du séisme (un écart de 3 sur l'échelle de Richter correspond à un facteur multiplicatif d'environ 32 000 de cette énergie exprimée en joules). Les plus puissants séismes observés à ce jour et qu'on a pu mesurer ne dépassaient pas 9 sur l'échelle de Richter.

La terre est sujette environ tous les trois jours à des tremblements violents, de magnitude supérieure à 6, dont les épicentres sont le plus souvent dans des régions complètement inhabitées.

En région habitée, un séisme de magnitude inférieure à 3,5 n'est pas détecté. Au-delà de 6, des dégâts très importants peuvent se produire dans un rayon de 100 km autour de l'épicentre (pour 6, on peut observer la destruction des constructions non parasismiques).

Exemple 4: Écritures décimale ou scientifique d'un nombre et logarithme décimal de ce nombre.

Le logarithme décimal d'un nombre réel positif x , noté $\log_{10} x$ est défini par $\ln x / \ln 10$. Quelles sont les parties entières de $\log_{10} x$ pour les nombres x suivants: 100; 1000; 145678; 5674321890,789; $2,3 \cdot 10^{12}$; $5,2 \cdot 10^{-7}$?

Fonction exponentielle

La fonction exponentielle pourra être présentée comme la fonction réciproque (on ne soulèvera aucune difficulté à propos de cette notion) de la fonction logarithme népérien. Représentation graphique, limites en $+\infty$ ou $-\infty$, relation fonctionnelle s'en déduiront directement; on adoptera dès le départ la notation e^x , dont on vérifiera la cohérence avec l'exponentiation entière.

Avec e^x , pour des valeurs entières de x , on retrouve une suite géométrique; mais à la différence des suites géométriques, on peut directement considérer ce qui se passe pour n'importe quel réel t entre deux entiers consécutifs.

La dérivée de e^x pourra se déduire de considérations graphiques: symétrie des courbes des fonctions logarithme et exponentielle par rapport à la première bissectrice du repère et donc aussi des tangentes (on passe du point (a, b) avec $b = e^a$ au point (b, a) avec $a = \ln b$), puis à la tangente de coefficient directeur $1/b$, enfin à la tangente de coefficient directeur b , d'où l'on sort $(e^x)' = e^x$. Pour une telle fonction, on a donc la relation fondamentale $y' = y$.

Voici deux exemples où interviennent les fonctions exponentielles.

Exemple 1: Désintégration atomique

Si à l'instant 0, un minéral contient $N(0)$ atomes d'une substance radioactive, on peut montrer qu'à l'instant t il n'en reste plus que $N(t) = e^{-at} N(0)$.

a) On appelle temps de demi-vie le temps τ tel que pour tout $t > 0$: $N(t + \tau) = N(t)/2$. Calculer τ en fonction de a .

b) On voit parfois la loi de désintégration écrite sous la forme $N(n\tau) = 2^{-n}N(0)$.

Qu'en pensez-vous ?

Estimer, en fonction de τ , le temps qu'il faudra pour que le nombre d'atomes soit divisé par 1000, par 10^6 . (On pourra utiliser le fait que $2^{10} = 1024$, voisin de 1000.)

Application numérique

Quelques temps de demi-vie

Uranium-238 : $4,5 \times 10^9$ ans

Plutonium-239 : $2,4 \times 10^4$ ans

Carbone-14 : 5 730 ans

Iode-131 : 8 jours

Polonium-213 : 4×10^{-6} s

Beryllium-8 : 1×10^{-16} s

Exemple 2 : Courbes en cloche – Fonctions $\exp(-kx^2)$

On considère la plus petite valeur positive x_n telle que pour tout $x \in]x_n; +\infty[$, $\exp(-x^2) < 10^{-n}$.

n	1	2	3	4	5	10
x_n , à 10^{-2} près	1,52	2,14	2,63	3,03	3,39	4,80

a) Construire un tableau analogue pour les fonctions $\exp(-0,5x^2)$ et $\exp(-2x^2)$.

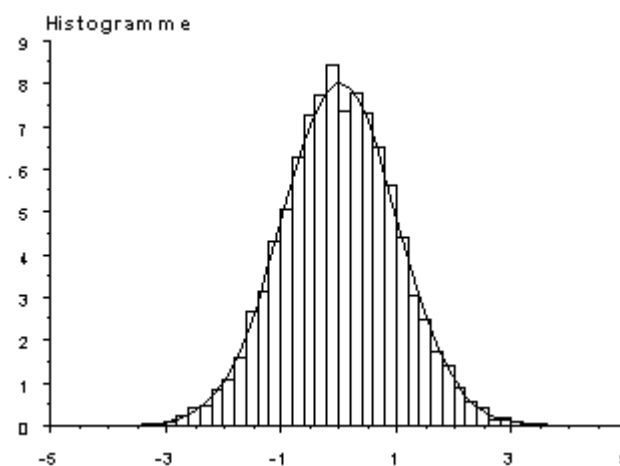
b) Tracer à l'aide d'un grapheur les courbes représentatives des trois fonctions.

c) Si on prend 10 cm comme unité de longueur sur les axes et que la précision du dessin est de 1 mm, à partir de quand la représentation de la courbe se confond-elle avec l'axe des x ?

Le programme de première parle de données gaussiennes ; quand on a de très nombreuses données de ce type, l'histogramme « colle » à une courbe dont l'équation est du type $y = a \exp(-kx^2)$ (on parle parfois de courbes en « cloches »), l'origine étant placée à la moyenne des données.

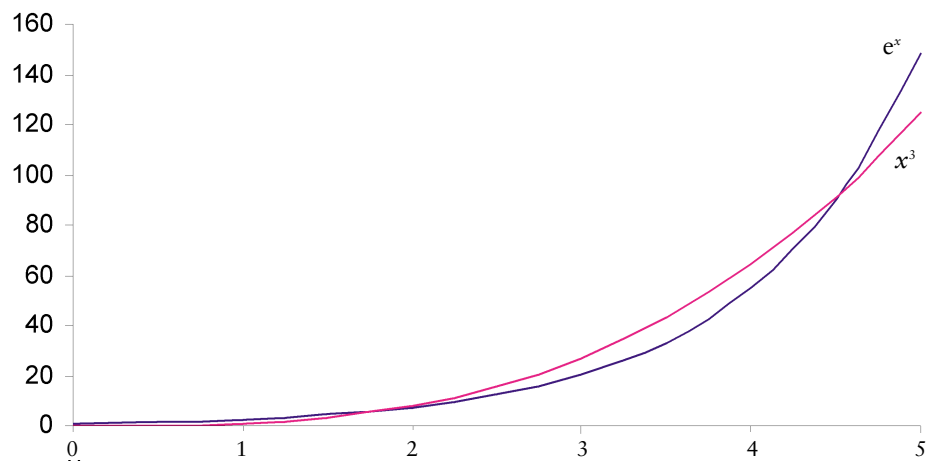
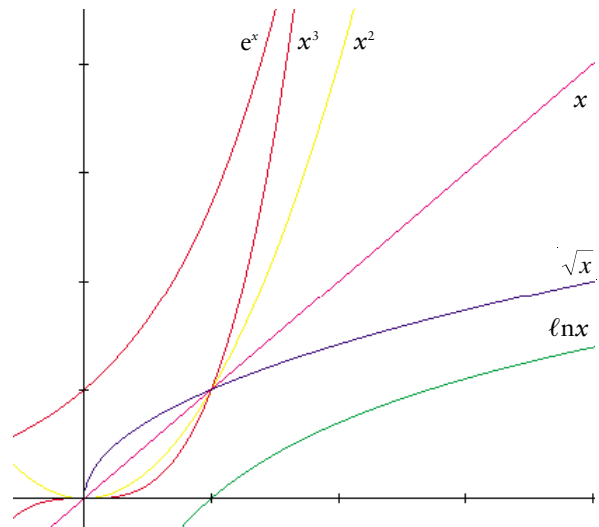
On a représenté ci-contre 10 000 données gaussiennes de moyenne 0.

La courbe a pour équation : $y = \sqrt{1/2\pi} \exp(-x^2/2)$.



Qui est le plus rapide ?

On trouvera ci-contre et ci-dessous les courbes représentatives des fonctions x , x^2 , x^3 , \sqrt{x} , e^x et $\ln x$; le premier dessin est fait en repère orthonormal; dans le deuxième, on a modifié les graduations de l'axe des y pour montrer que l'exponentielle finit par l'emporter sur x^3 .



Ces graphiques illustrent le résultat indiqué dans le programme sur les croissances comparées : ces résultats seront admis. On les étendra à la comparaison entre les suites arithmétiques et géométriques.

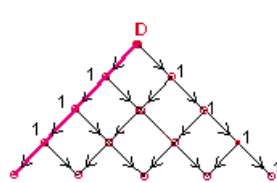
P

robabilités, statistique et combinatoire

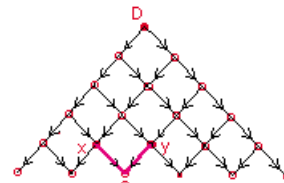
Combinatoire en classe de première

La notion de combinaison peut par exemple être introduite à partir d'une ou de plusieurs situations parmi les suivantes, les autres étant traitées une fois que la notion de combinaison est mise en place.

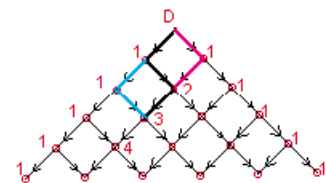
a) Recherche du nombre de chemins :



Il n'y a qu'un seul chemin possible pour arriver à chacun des points du bord gauche ou du bord droit.

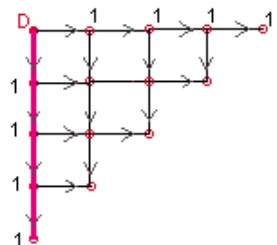


Combien y a-t-il de chemins possibles pour parvenir au point marqué « ? », sachant qu'il y a x et y chemins différents pour parvenir aux deux points situés juste au-dessus ?

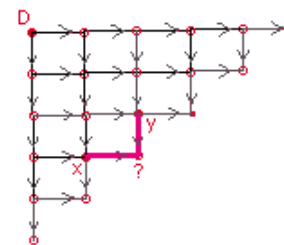


Compléter pour chaque point avec le nombre de chemins possibles depuis D.

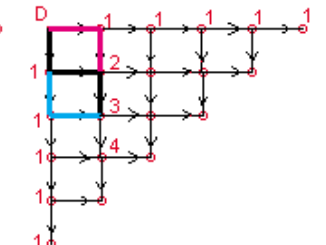
Ou alors, la même chose avec cette disposition :



Il n'y a qu'un seul chemin possible pour arriver à chacun des points du bord vertical à gauche ou du bord horizontal en haut.



Combien y a-t-il de chemins possibles pour parvenir au point marqué « ? », sachant qu'il y a x et y chemins différents pour parvenir aux deux points situés juste avant ?



Compléter pour chaque point avec le nombre de chemins possibles depuis D.

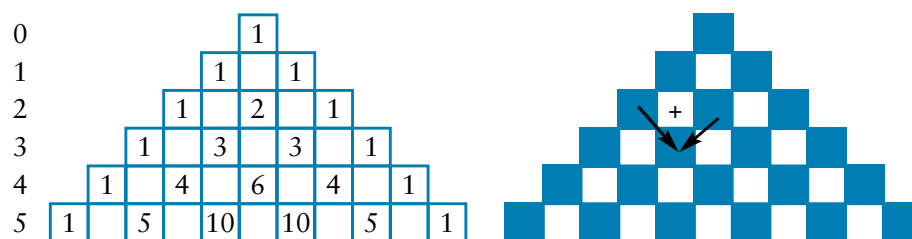
b) calcul du coefficient du terme a^k dans $(1 + a)^{10}$;

c) calcul du nombre d'équipes de 5 personnes choisies dans un club de 10 membres ;

d) calcul des « chances » de trouver du premier coup un code à 7 chiffres dont 4 valent 1 et les autres 0 ;

e) calcul des « chances » d'obtenir n piles dans un lancer de $2n$ pièces, $n = 1 \dots 5$.

On se ramène dans tous ces cas à l'étude de la famille des nombres qui se calculent en cascade selon le schéma ci-après (la première et la dernière cases de chaque ligne sont occupées par un 1).



Comme indiqué dans le programme, ces nombres seront désignés $\binom{n}{p}$ (on lira « p parmi n »), n correspondant au numéro de ligne sur le schéma ci-dessus (en commençant la numérotation à 0) et p au numéro d'ordre (en commençant la numérotation à 0) sur la ligne n ; les décomptes de parties à p éléments dans un ensemble de n éléments aident à comprendre ce choix et illustreront si besoin est la formule $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Ces nombres seront utilisés pour la résolution de problèmes élémentaires de dénombrement. Leur calcul effectif obligera au départ à reconstruire le « triangle de Pascal » ci-dessus. La recherche d'une formule de calcul plus rapide pourra amener à l'introduction de la notation factorielle et à la mise en place de la formule $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ ou de la formule, $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots}{p(p-1)\dots}$,

(p facteurs au numérateur comme au dénominateur), mais on évitera toute complication lors de l'utilisation de ces formules.

On pourra aussi introduire et manipuler le nombre et la notation $n!$ à travers les situations suivantes :

- calculs de dénombrements d'anagrammes d'un mot court composé de lettres distinctes; on pourra s'appuyer sur des schémas d'arbres (schémas introduits dans le programme de mathématiques-informatique au paragraphe « Outils graphiques de dénombrement »);
- calcul de « chances », par exemple celle de trouver du premier coup un code d'immeuble à 4 chiffres en connaissant dans le désordre ses chiffres, supposés distincts;
- étude de la suite définie par : $u_{n+1} = (n+1)u_n$; $u_0 = 1$.

On pourra observer sur calculatrice ou sur tableur, puis démontrer (à l'aide des combinaisons) que le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par $n!$.

Probabilités et statistique

Le chapitre probabilités-statistique s'appuie sur le programme de seconde (fluctuations d'échantillonnage) et de première (étude de tableaux à double entrée, combinatoire). On peut choisir l'approche décrite dans le document d'accompagnement de la classe de première ES; une autre approche est proposée ci-dessous.

Équiprobabilité, modélisation d'expériences de référence

On part d'un problème posé en termes de chances (« quelles chances a-t-on d'observer 0 pile, 1 pile, 2 piles pour deux lancers de pièces équilibrées ? »). On pourra reprendre, qu'il ait été traité ou non par des élèves de la classe, le contenu de la fiche de statistique de seconde intitulée « Des chances inégales » et introduire en premier lieu la notion d'équiprobabilité; on modélisera les expériences de référence telles que le choix d'une boule dans une urne, les lancers de pièces ou de dés, les choix de lettres. Le choix au hasard d'un élément parmi N signifie qu'on se place dans un modèle avec équiprobabilité.

La notion de k expériences identiques et indépendantes signifie que chaque expérience relève du même modèle (ici, équiprobabilité sur $\{1, \dots, N\}$) et que la probabilité d'une liste de résultats est le produit de la probabilité de chacun d'eux, soit $1/N^k$. On indiquera que la touche *random* d'une calculatrice fournit des tirages indépendants de chiffres au hasard; on simulera la loi de probabilité de la somme des faces de deux dés

équilibrés ; cette loi devra ensuite être calculée. On pourra aussi calculer, lors du lancer de deux dés, un rouge et un vert, la probabilité d'avoir deux six sachant que le dé vert est tombé sur 6 (on trouve $1/6$) puis sachant que l'un des deux dés est tombé sur 6 (on trouve $1/11$), ou travailler à partir des situations ci-dessous.

Composition musicale et lancers de dés

Un an après la mort de W. A. Mozart (1756-1791), fut publiée à Berlin une œuvre de jeunesse intitulée *Musikalisches Würfelspiel (Jeu de dés musical)*. Elle se compose de deux feuilles, ayant chacune 11 lignes et 8 colonnes, soit un tableau de 16 colonnes et 11 lignes ; dans chaque case du tableau figure une mesure. Pour écrire un morceau de 16 mesures, on choisit successivement, en lançant à chaque fois deux dés, une mesure dans chaque colonne : si s est la somme des dés lancés pour une certaine colonne, la mesure pour cette colonne sera celle de la ligne $s - 1$. Les mélodies ainsi obtenues satisfont aux règles de composition des menuets de cette époque. Mais Mozart savait-il que les mélodies ne sont pas équiprobables ?

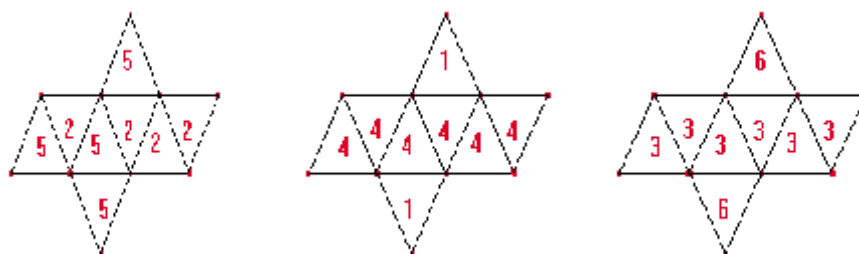
Au moins une douzaine de compositeurs classiques, dont Bach et Haydn, se sont essayés à ce type d'exercice ludique. Plus récemment, Scott Joplin a repris l'idée de composition aléatoire de ragtimes dans *Melody Dicer*.

- Les mesures de chaque colonne sont distinctes, sauf pour les colonnes 8 et 16, où il n'y a que deux mesures différentes, soit environ $1,52 \times 10^{15}$ menuets. Comment a été calculé ce nombre ?
- Si 10 000 ordinateurs éditent chacun un menuet toutes les deux secondes, 24 heures par jour, combien de temps faut-il pour les éditer tous ?
- Dans la colonne 8, Mozart pouvait-il faire en sorte que les deux mesures aient une égale probabilité de se trouver choisies ?

Dés octaédriques

D'après M. Fletcher, *Canterbury, Angleterre*.

Trois dés octaédriques A, B et C ont leurs faces marquées comme indiqué ci-dessous :



Lorsqu'on lance un tel dé, on s'intéresse au nombre inscrit sur la face cachée, *i.e.* celle sur laquelle il tombe.

- Modéliser le lancer de A par une loi de probabilité sur $\{2, 5\}$.
- Modéliser le lancer de B par une loi de probabilité sur $\{1, 4\}$.
- Modéliser le lancer de C par une loi de probabilité sur $\{6, 3\}$.
- On lance les dés deux par deux. Montrer que la probabilité, notée $P(A > B)$, pour que A gagne lorsqu'on lance A et B, est supérieure à 0,5 et que $P(B > C)$ est aussi supérieure à 0,5.
- La probabilité $P(A > C)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

Loi de probabilité sur un ensemble fini

On introduira le concept de probabilité en vue de modéliser des situations particulières pour lesquelles aucune propriété de symétrie ne permet de parler « d'égalité des chances ».

Exemple

On dispose du tableau suivant donnant les occurrences de différents groupes sanguins sur une série de 10 000 naissances dans des maternités de France.

A	B	AB	O
4546	863	449	4142

Modéliser cette situation, c'est définir une loi de probabilité sur $E = \{A, B, AB, O\}$, c'est-à-dire affecter à chaque élément de E un nombre (sa probabilité) positif ou nul, la somme de ces nombres valant 1.

On admettra la loi des grands nombres; c'est un théorème de mathématiques qui peut être énoncé sous une forme vulgarisée: « Si on choisit n éléments selon une loi de probabilité P , indépendamment les uns des autres, alors la distribution des fréquences est voisine de P lorsque n est grand. »

Les élèves ont observé en seconde la diminution de l'ampleur de la fluctuation d'échantillonnage avec la taille de la série de données: il s'agissait de l'observation d'une loi empirique. La correspondance entre loi empirique et théorème mathématique est un des fondements de la modélisation par des modèles probabilistes.

En vertu de la loi des grands nombres, on choisira le modèle défini par $P = (4546/10000, 863/10000, 449/10000, 4142/10000)$ ou la loi $P' = (0,45; 0,09; 0,05; 0,41)$. Dans le modèle défini par P' , on dira qu'un bébé qui va naître a une probabilité 0,41 d'être du groupe O. On indiquera qu'une validation d'un modèle consisterait par exemple à prendre de nouvelles données expérimentales et à comparer ce qu'on obtient et ce que prévoit le modèle (compte tenu de la fluctuation d'échantillonnage, les modalités de cette comparaison ne sont pas simples et sont hors programme).

La liste des groupes sanguins de 10 bébés (en excluant les naissances multiples!) sera alors modélisée comme la liste des résultats de 10 expériences « identiques et indépendantes »: la probabilité de la liste obtenue est égale au produit des probabilités de chacun de ses termes.

On veut maintenant faire un modèle tenant compte du facteur rhésus; le tableau des données est le suivant:

	A	B	AB	O
RH+	3968	753	385	3566
RH-	578	110	64	576

La loi considérée ici sera une loi de probabilité sur $\{A+, A-, B+, B-, AB+, AB-, O+, O-\}$. On pourra alors calculer la probabilité de chaque groupe, celle d'être rhésus positif, la probabilité de l'être sachant O, etc.

Remarque – Plus le nombre n d'individus ayant permis le choix d'un modèle est grand, plus ce modèle est précis au sens suivant: pour n petit, de nombreux modèles sont déclarés par les statisticiens « compatibles » avec les n données; pour n grand, les modèles compatibles seront presque identiques. La fluctuation d'échantillonnage est en effet d'autant plus faible que n est grand.

Voici les pourcentages de facteur rhésus positif pour 5 séries de taille 100 et 5 séries de taille 1000: si à chaque série, on associe un modèle pour lequel la probabilité est égale à la fréquence observée, les 5 probabilités ainsi construites ont des étendues respectives de 0,09 et 0,02:

Séries de 100	87	86	84	81	96
Séries de 1000	86,4	86,7	88,4	86,5	88,1

On propose ici quelques exemples d'activités.

La loi du premier chiffre

On raconte qu'en considérant les premiers chiffres à gauche (2 pour 2374, 1 pour 0,16), des nombres de la page « Finances et Marchés » du journal *Le Monde*, on trouve à peu près chaque jour la même distribution de fréquences. On peut alors définir une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$.

a) Si une telle loi existe, est-ce l'équiprobabilité? Expérimenter...

b) Les nombres $\log_{10}(1+1/1)$, $\log_{10}(1+1/2)$, $\log_{10}(1+1/3)$, ..., $\log_{10}(1+1/9)$ définissent-ils une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$?

c) Comparer les résultats obtenus en 1 et en 2.

S'il existe une loi de probabilité pour les nombres de la page « Finances et Marchés », alors cette loi doit être conservée si les quantités, exprimées dans une certaine monnaie, le sont dans d'autres monnaies... On peut montrer que la loi décrite en 2 est la seule qui vérifie cette propriété (pour plus de détails, voir l'article « Le premier chiffre à gauche » dans le logiciel *SEL* sur le cédérom fourni avec le document d'accompagnement *Mathématiques – Classe de première des séries générales*).

Erreurs de saisie

Dans un centre spécialisé, 22 000 numéros de sécurité sociale (13 chiffres) ont été saisis et ont donné lieu à 1 004 mauvais numéros dus à 1 273 erreurs de retranscription réparties selon trois types :

A : un seul chiffre faux (765 cas)

B : mauvais nombre de chiffres (360 cas)

C : inversion de deux chiffres voisins (148 cas)

Aucun numéro ne contenait plus de deux erreurs.

On admet que la répartition entre les erreurs simples A, B et C ne dépend pas du nombre d'erreurs faites dans une recopie.

Définir une loi sur $\{0, A, B, C, 2\}$ qui modélise les erreurs, où :

0 signifie qu'il n'y a pas d'erreurs et 2 qu'il y a deux erreurs.

Lettres

À partir de divers textes récents écrits en langue française, on estime qu'en tirant au hasard une lettre dans un texte, les probabilités d'apparition sont données ci-dessous, multipliées par 100 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
9,42	1,02	2,64	3,39	15,87	0,95	1,04	0,77	8,41	0,89	0,00	5,34	3,24
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
7,15	5,14	2,86	1,06	6,46	7,90	7,26	6,24	2,15	0,00	0,30	0,24	0,32

Tableau extrait de *Histoire des codes secrets de Simon Singh* (Édition J.-C. Lattès, 1999).

Un texte comporte 10 000 voyelles ; estimer le nombre de lettres du texte et le nombre de e (on exclut que ce texte soit *La Disparition* ou *Les Revenentes* de G. Perec).