Annexe II

MATHÉMATIQUES - CYCLE TERMINAL DE LA SÉRIE TECHNIQUES DE LA MUSIQUE ET DE LA DANSE APPLICABLE À COMPTER DE LA RENTRÉE 2003

INTRODUCTION

Le programme de mathématiques des classes de première et terminale Techniques de la musique et de la danse s'inscrit dans le cadre d'une formation scientifique qui permet :
- de mettre en perspective les interactions entre les mathématiques, les phénomènes acoustiques et leurs perspectives musicales ;
- d'évaluer le plus justement possible le niveau d'abstraction attendu des élèves, pour qu'ils puissent avoir une perception claire des phénomènes sus-nommés ;
- de prendre en compte les besoins des élèves liés à d'éventuelles poursuites d'études supérieures, et à cette fin de ne pas les éloigner de la réalité du niveau des mathématiques enseignées dans d'autres séries.

Ce programme s'inscrit dans la continuité de celui de la classe de seconde, il prépare aux filières de l'enseignement supérieur qui sont accessibles à ces élèves, et veille à fournir les outils nécessaires pour suivre avec profit les autres enseignements. Il importe de promouvoir l'unité de la formation des élèves en exploitant les interactions entre les différentes parties du programme et entre les mathématiques et les autres disciplines.

On insistera sur l'importance du travail personnel des élèves, tant en classe qu'en dehors des heures de cours, et sur le rôle formateur des activités de résolution de problèmes. Dans cette perspective, chaque chapitre sera accompagné de travaux pratiques, le plus souvent reliés à l'étude de phénomènes acoustiques, de structures musicales d'écriture chorégraphique.

La part de l'abstraction se cantonnera, dans la mesure du possible, à la présentation des concepts mathématiques indispensables à toute présentation des théories qui unifient et généralisent. Les résultats par trop techniques pourront être admis, et l'accent sera mis sur l'utilisation à bon escient des outils mathématiques dégagés par le professeur à la suite de l'observation d'exemples judicieux.

Usage de l'outil informatique

L'usage éclairé d'outils informatiques est recommandé dans chaque chapitre du programme, que ce soit à travers l'utilisation de tableur, de grapheur, de logiciel de calcul formel. Il pourra être utile de faire le lien avec les logiciels utilisés en musique ou en sciences physiques.

Le programme ne fixe pas de répartition entre différentes modalités qui doivent toutes être présentes : activités des élèves sur ordinateur ou sur calculatrices programmables graphiques, travail de la classe entière (ou d'un groupe) utilisant un ordinateur muni d'un dispositif de visualisation collective. Il convient en ce domaine que les professeurs déterminent en chaque circonstance la stratégie d'utilisation la plus adaptée.

Musique, danse et mathématiques

Les élèves doivent prendre conscience des liens que les mathématiques entretiennent avec la compréhension des phénomènes acoustiques, ou la notation du mouvement. L'essentiel des contenus est articulé avec des éléments musicaux, essentiellement les gammes et les tempéraments. Le professeur devra donc intégrer ces références à son enseignement, en collaboration avec l'ensemble des enseignants, et en particulier ceux de musique et de sciences physiques. Des connaissances musicales ne sont aucunement nécessaires au professeur pour enseigner ce programme. Un intérêt pour les grands noms des mathématiques ayant écrit à propos du domaine musical, et pour les théoriciens de la musique ayant reconnu dans les mathématiques un outil d'un grand secours pourra être utile. Une abondante bibliographie est accessible, et les enseignants sont invités à s'y reporter (voir document d'accompagnement).

Organisation de l'enseignement et du travail des élèves

Chaque professeur garde toute liberté pour l'organisation de son enseignement, dans le respect des contenus et modalités de mise en œuvre précisés dans les tableaux qui suivent.
L'enseignant veillera à équilibrer les divers temps de l'activité mathématique dans sa classe : recherche de problèmes, résolution d'exercices, exposé magistral, synthèse,..., rythmeront les heures de classe et viseront tous à promouvoir chez chaque élève l'acquisition d'une culture mathématique adaptée à leurs projets d'études.
À cet égard, les travaux proposés en dehors du temps d'enseignement jouent un rôle primordial ; ils ont des fonctions diversifiées :
- la résolution d'exercices d'entraînement, en liaison avec l'étude du cours, permet aux élèves d'affermir leurs connaissances de base et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples ;
- l'étude de situations plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problème à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux élèves d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés ;
- les devoirs de contrôle, peu nombreux, combinent des exercices d'application directe du cours (voire des questions de cours), et des problèmes plus synthétiques, comportant des questions enchaînées de difficulté progressive et permettant aux élèves de vérifier leurs résultats ;
- l'exploitation de documents, individuelle ou en équipe, contribue au développement des capacités d'expression écrite (rédaction d'un rapport) ou orale (mise au point d'un exposé). Les travaux personnels encadrés (TPE), dont les thèmes de seconde sont une approche, et qui s'inscrivent dans cet axe de travail, permettent aussi de faire étudier des situations complexes et d'entraîner les élèves à mener un travail long jusqu'à son terme.

Présentation des programmes

On trouvera ci-après des tableaux comportant trois colonnes : la première indique les contenus à traiter ; la seconde fixe, lorsque cela est utile, des modalités de mise en œuvre, notamment informatiques ; la troisième explicite le sens ou les limites de certaines questions, mais la longueur du commentaire n'est pas proportionnelle au temps à consacrer à ce sujet.
L'ordre adopté ici par commodité pour présenter les divers paragraphes des chapitres ne doit pas être opposé aux liens intimes qui unissent ces paragraphes et que l'organisation du cours permettra de mettre en évidence : aucun ordre n'est imposé et les contenus peuvent être réorganisés suivant d'autres progressions.

CLASSE DE PREMIÈRE : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Analyse

Le programme d'analyse élargit l'ensemble des fonctions que l'on peut manipuler et ouvre la voie à l'étude de certaines de leurs propriétés, nécessaires à la résolution de problèmes et à la compréhension de phénomènes acoustiques.
Le professeur veillera à équilibrer l'importance des deux parties présentées dans le tableau ci-dessous. En particulier, même si l'acquisition du concept de dérivée est un point important du programme de première, il ne faut pas voir la dérivation des fonctions comme un préalable à leur étude. L'acquisition de compétences dans la lecture graphique des propriétés des fonctions trigonométriques est un point essentiel en vue de l'approche de la décomposition de Fourier qui sera étudiée en terminale.

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Suites Modes de générations d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques.	L'exemple fondamental est l'élaboration de *gammes à tempérament égal*. On introduira les fonctions exponentielles par interpolation des suites géométriques. La fonction logarithme décimal sera introduite par l'intermédiaire de la calculatrice. Usage du papier semi-logarithmique.	L'idée est de faire comprendre aux élèves que les suites arithmétiques et géométriques formalisent les deux modes de pensée liés à la hauteur des sons : le musicien additionne des intervalles, tandis que l'acousticien multiplie des fréquences.
Généralités sur les fonctions Opérations sur les fonctions : $u + v, \lambda u, \frac{u}{v}, u, u \circ v$. Compositions simples : $f^2, \frac{1}{f}, x \longmapsto f(ax+b)$ Sens de variation et représentation graphique d'une fonction de la forme $u + \lambda, \lambda u$, la fonction u étant connue.	On travaillera, à l'aide de grapheurs, sur des familles de courbes représentatives de fonctions associées à deux fonctions données u et v : $u + \lambda, \lambda u, u + v, \|u\|, x \longmapsto u(\lambda x)$ et $x \longmapsto u(x + \lambda)$.	Nulle technicité n'est attendue en la matière, l'objectif est d'appliquer ces contenus aux fonctions trigonométriques.
Fonctions trigonométriques $t \longmapsto a \sin(\mathrm{v} t + \mathrm{w})$. Interprétation des paramètres a, v et w.	Arcs remarquables : $-x, x + \pi, \pi - x, \frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} + x$ Tracé point par point de : $t \longmapsto$ a $a \sin(\mathrm{v} t + \mathrm{w}) + a' \sin(\mathrm{v}' t + \mathrm{w}')$	On privilégiera l'écriture $\mathrm{v} = \frac{2\pi}{T}$ On approchera globalement le tracé de ces courbes, en insistant sur la connaissance de l'allure d'une sinusoïde, et de ses diverses symétries.
Notion de limite, de nombre dérivé. Approche graphique du nombre dérivé Tangente en un point à une courbe d'équation $y = f(x)$.	Cette notion est obtenue graphiquement, elle n'a pas à être définie. Une courbe ayant été obtenue, soit par un tracé manuel, soit à l'aide d'un grapheur, on peut alors approcher localement un arc de courbe par un segment de tangente et apprécier la qualité de cette approximation au moyen de mesures graphiques (éventuellement après agrandissement).	

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Nombre dérivé d'une fonction en un point a.	On définit le nombre dérivé de f en a comme le cœfficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a ; on le note $f\,'(a)$.	
Dérivation sur un intervalle, fonction dérivée Dérivée d'une somme, d'un produit par une constante, d'un produit, d'un inverse, d'un quotient. Dérivée de $x \longmapsto x^n$ (n entier relatif). $x \longmapsto \sin x$ $x \longmapsto \cos x$	Les élèves doivent connaître ces règles et savoir les appliquer à des exemples ne présentant aucune complication technique, tels que $x \longmapsto x^3 - 3x$ ou $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$ Les démonstrations de ces règles ne sont pas au programme. La notation différentielle peut être donnée en liaison avec les autres matières, mais aucune connaissance à ce sujet n'est exigible en mathématiques.	On introduira à cette occasion la notion de fonction polynôme et de son degré. On remarquera que la dérivation des fonctions sinus et cosinus équivaut à un déphasage.
Application à l'étude du comportement global des fonctions Si f est dérivable sur un intervalle I et admet un maximum local (ou un minimum local) en un point a distinct des extrémités de l'intervalle I, alors $f\,'(a) = 0$. Si f est dérivable sur l'intervalle I et si la dérivée $f\,'$ est nulle sur l'intervalle I, alors f est constante sur l'intervalle I. Si f est dérivable sur l'intervalle I, et si $f\,'$ est positive sur l'intervalle I, alors f est croissante sur l'intervalle I. Si f est dérivable sur $[a\,;b]$ où $a<b$, et si $f\,'$est à valeurs strictement positives sur $]a\,;b[$ alors f est strictement croissante sur $[a\,;b]$ et, pour tout élément λ de $[f(a)\,;f(b)]$, l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution et une seule dans $[a\,;b]$. Énoncés analogues pour les fonctions décroissantes.	Les résultats de ce paragraphe seront admis On mettra en valeur les interprétations graphiques des énoncés de ce paragraphe. On observera d'abord que, si f est croissante sur l'intervalle I, alors $f\,'$ est positive sur l'intervalle I.	

Arithmétique

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Divisibilité, P.G.C.D., P.P.C.M. Entiers premiers entre eux, théorème de Gauss.	On étudiera quelques critères de divisibilité. On fera le lien avec le “*cycle des quintes*” qui ne se referme pas (*i e* : il n’existe pas d’entier qui soit à la fois une puissance de 2 et une puissance de 3).	On admettra l’existence et l’unicité de la décomposition d’un entier comme produit de facteurs premiers. On saisira l’occasion de ce chapitre pour une initiation à l’écriture algorithmique.

Probabilités et statistique

La partie du programme consacrée aux probabilités et à la statistique est centrée :

- sur la mise en place d’éléments de base indispensables pour comprendre ou pratiquer la statistique partout où elle est présente ;
- sur l’acquisition de concepts de probabilité permettant de comprendre et d’expliquer certains faits simples observés expérimentalement ou par simulation.

Le programme de la classe de première introduit quelques outils descriptifs nouveaux :

- les diagrammes en boîtes qui permettent d’appréhender aisément certaines caractéristiques des répartitions des caractères étudiés et qui complètent la panoplie des outils graphiques les plus classiquement utilisés ;
- Deux mesures de dispersion : l’écart type et l’intervalle interquartile.

Ces éléments de statistique pourront notamment être travaillés pour des séries construites à partir de séries simulées ; on rencontre ainsi des répartitions variées et on prépare la notion d’estimateur. Cette partie descriptive ne doit pas faire l’objet de longs développements numériques, ni être déconnectée du reste du programme de probabilité et statistique.

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Statistique Variance et écart-type. Diagramme en boîte ; intervalle interquartile. Influence sur l’écart type et l’intervalle interquartile d’une transformation affine des données.	On cherchera des résumés pertinents et on commentera les diagrammes en boîtes de quantités numériques associées à des séries simulées ou non. On observera l’influence des valeurs extrêmes d’une série sur l’écart type ainsi que la fluctuation de l’écart type entre séries de même taille. L’usage d’un tableur ou d’une calculatrice permettent d’observer dynamiquement et en temps réel, les effets des modifications des données.	L’objectif est de résumer une série par un couple (mesure de tendance centrale, mesure de dispersion). Deux choix usuels sont couramment proposés : le couple (médiane ; intervalle interquartile), robuste par rapport aux valeurs extrêmes de la série, et le couple (moyenne ; écart-type).

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Probabilités Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, espérance, variance, écart-type.	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$; 100 ; 1000.	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.

CLASSE DE PREMIÈRE : ENSEIGNEMENT RENFORCÉ

L'enseignement renforcé est organisé sous forme de thèmes liés aux contenus de l'enseignement obligatoire.

Analyse

- Tracé de : $t \longmapsto a \sin(\text{v}t) + a \sin(\text{v}'t)$. Application aux *battements*. On signalera leur signification musicale et physique.
- Utilisation d'un tableur, d'un grapheur. Sur tableur, explicitation des différentes étapes du calcul d'une formule en appliquant d'une colonne à l'autre une seule opération (+, - , /, carré, $\sqrt{\ }$ ...). Explicitation de l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x). Recherche de la formule permettant de passer de la cellule recevant x à la valeur de la cellule donnant $f(x)$. À l'aide d'un traceur de courbes, approche de l'ajustement fonctionnel d'un tableau de valeurs. On pourra faire le lien avec l'introduction de la fonction exponentielle obtenue par interpolation.
- Dérivation de : $t \longmapsto a \sin(\text{v}t + \text{w})$.

Arithmétique

- Activités autour des différents *tempéraments*. L'objectif est d'utiliser à bon escient les puissances d'entiers et leurs quotients pour caractériser les intervalles qui les constituent.

Statistiques

- Élaboration et traitement d'une enquête statistique mettant en œuvre les “boîtes à moustaches”. On mettra en évidence l'importance des valeurs extrêmes sur la moyenne et l'écart-type d'une série de données. On pourra, par exemple, tester les seuils d'audition de divers groupes de personnes (jeunes ou âgés, musiciens ou non, ...).

Probabilités

- Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.). On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.). On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

Géométrie

- Repérage dans l'espace, représentation en perspective cavalière. Exemples d'utilisation de logiciels de géométrie dynamique dans l'espace.

CLASSE TERMINALE : ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Analyse

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Fonctions logarithme népérien et exponentielle. Équations fonctionnelles caractéristiques. Introduction du nombre e. Dérivées. Représentations graphiques	Maîtrise des conséquences immédiates des équations fonctionnelles. La fonction logarithme décimal, notée log, est introduite pour son utilité dans le domaine du son et son rapport avec l'écriture décimale des nombres.	Unités acoustiques définies à l'aide du logarithme (savart, décibels, cents) Le lien avec les suites géométriques et la croissance exponentielle ne devra pas être négligé.
Fonction $x \mapsto a^x$ pour $a > 0$. Étude du cas particulier $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 10^x$.	L'usage du grapheur permet de positionner les courbes représentatives de $x \mapsto e^x$ et de $x \mapsto \ln x$ par rapport à celles des fonctions $x \mapsto x^n$. Résolutions d'équations simples Étude des fonctions $x \mapsto e^{-kx}$ ou $x \mapsto e^{-kx^2}$, avec k>0, mise en évidence de leur décroissance rapide.	Ces fonctions sont très utilisées en théorie du signal. L'utilisation d'un logiciel de calcul formel est souhaitée ou de certains logiciels manipulant des signaux utilisés en physique
Approximation d'un signal périodique par une somme de Fourier	Retrouver à l'aide d'un logiciel les premiers cœfficients de Fourier pour une composée simple	Applications aux harmoniques Faire le lien avec le timbre des instruments (orgues...)
Congruences dans $\mathbb{Z}$ Notation : a ; b (n) ou a ; b (*modulo* n)	La division euclidienne permet de faire apparaître que l'ensemble des restes est muni d'une loi d'addition et de multiplication. Une étude plus particulière des congruences modulo 7 et 12 et de leurs applications à la musique est à faire.	L'efficacité du langage des congruences sera mise en évidence sur des exemples, en particulier liés à la notation musicale. La notation $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ pourra être utilisée. L'étude de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est hors programme.

Probabilités

Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Indépendance de deux événements		Un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve. Un lien avec la musique aléatoire et la composition chorégraphique est à faire.
Formule des probabilités totales		Les élèves doivent savoir appliquer sans aide la formule des probabilités totales dans des cas simples.

CLASSE TERMINALE : ENSEIGNEMENT RENFORCÉ

Analyse

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Fonctions trigonométriques	Dérivation de $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$. Primitive de fonctions trigonométriques	Ces fonctions seront utilisées pour l'analyse et la synthèse d'un son ainsi que pour des problèmes de modulation-démodulation et d'amplitude.
Calcul intégral Pour une fonction f continue positive sur [a,b], introduction de la notation $\int_a^b f(x)dx$ comme aire sous la courbe. Le théorème fondamentale de l'analyse est admis. Valeur moyenne d'une fonction	L'aire sous la courbe peut être approchée en l'encadrant par deux suites adjacentes construites en quadrillant le plan de plus en plus finement. Exemple où la fonction intégrée est en escalier ou monotone.	Le lien entre intégrale et primitive sera mis en valeur. Les élèves ont une notion intuitive d'aire (avec la propriété d'additivité) et savent calculer certaines aires élémentaires ; l'objectif est de leur donner un aperçu de la définition et du calcul d'aire de domaines plans liés aux fonctions ; tout développement théorique est exclu. La notion de suites adjacentes sera introduite uniquement en liaison avec le calcul intégral : encadrements d'aires(par exemple aire d'un cercle par la méthode d'Archimède...).

CONTENUS	MODALITÉS	COMMENTAIRES
Propriétés élémentaires : linéarité, positivité, ordre, relation de Chasles.		Les propriétés générales de l'intégrale seront rapidement commentées et admises ; les élèves s'en serviront comme règles opératoires. Les problèmes de son musical et de tuyau sonore et plus généralement d'acoustique montrent l'efficacité du calcul intégral.

Statistiques

	Statistiques bi-dimensionnelles. Régression par la méthode des moindres carrés, corrélation.	La corrélation n'est pas la causalité, exemples illustratifs.

Algèbre

Nombres complexes Le plan complexe : affixe d'un point. Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Conjugué d'un nombre complexe. Somme, produit, quotient de nombres complexes. Module et argument d'un nombre complexe ; module et argument d'un produit, d'un quotient. Ecriture $e^{iu} = \cos u + i \sin u$	Introduction géométrique des nombres complexes. La notation exponentielle est une simple écriture justifiée par le fait que la fonction $u \mapsto \cos u + i \sin u$ vérifie l'équation fonctionnelle caractéristique des fonctions exponentielles.	Les nombres complexes permettent de mémoriser les formules trigonométriques d'addition et de duplication. Illustration à l'aide des circuits RLC. On privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode. Il est vivement recommandé de ne pas abuser d'exemples ne comportant que des calculs techniques.