Série économique
et sociale

Orientations générales

Les enjeux de la classe terminale

La classe terminale marque la fin des études secondaires et, à travers l'examen du baccalauréat, ouvre la voie aux études supérieures ; ces deux aspects marquent profondément les pratiques des enseignants et des élèves. Ils entraînent des contraintes inévitables et des points de vue divers, avec lesquels il faut composer.

Un enseignement cohérent sur le cycle terminal

Les deux programmes du cycle terminal ES ne peuvent être lus indépendamment l'un de l'autre. C'est sur les deux ans que la plupart des notions sont à construire et à installer. Un travail essentiel a été fait dans celui de première : on y a introduit des concepts fondamentaux (probabilités, dérivation, suites pour la partie obligatoire ; calcul matriciel et géométrie dans l'espace pour la partie optionnelle). On revient sur ces concepts en terminale et on les met en œuvre dans des contextes plus larges : ainsi du concept de dérivée qui s'enrichit de celui de primitive. Cette vision du programme sur les deux années peut aider chaque enseignant dans le choix des exercices ou problèmes à traiter prioritairement avec ses élèves.
On aura le souci d'avancer dans la découverte des nouveaux concepts malgré la moindre technicité calculatoire que l'on peut observer chez bon nombre d'élèves. Cependant, la maîtrise du calcul élémentaire reste un objectif de base de l'enseignement des mathématiques et c'est cette maîtrise qui donne l'aisance indispensable à la bonne compréhension et au traitement efficace d'un problème ; elle libère la pensée et procure confiance en soi. La mémorisation de certaines formules est donc nécessaire au développement de l'intelligence du calcul : ainsi, comment aurait-on l'idée de retrouver dans une expression la forme $a^2 - b^2$ pour la factoriser si on ne connaît pas la formule $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$?
L'acquisition de réflexes doit cependant être reliée à la compréhension du calcul et répondre à un besoin avéré, y compris sur le long terme. La compréhension des méthodes importe d'autant plus qu'à un certain niveau d'études (et peut-être dans un futur proche pour l'enseignement secondaire), les outils de calcul formel permettent d'aborder des situations calculatoires demandant une plus grande technicité ou de déléguer à la machine la réalisation de tâches techniques longues. Dans l'immédiat, les éventuels manques techniques ne doivent pas empêcher de progresser dans l'étude d'objets nouveaux ; cette étude peut au contraire inciter à combler ces manques.

Exemples

Comme il est dit plus bas, l'entraînement à l'étude de fonctions permet d'acquérir de nouveaux outils de lecture de l'information. On est alors amené à proposer aux élèves des exercices plus ou moins élémentaires sur les fonctions ; on s'interrogera à chaque fois sur l'objectif visé.
1) Soient g et h les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $h(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2\ln x}{x} + \dfrac{x^2 - 1}{2x}$.
L'étude de f met en œuvre des calculs de limites, une recherche d'asymptote, un calcul de dérivée (puis une recherche du signe de cette dérivée grâce à l'étude d'une fonction auxiliaire), un calcul de valeurs, etc. L'étude complète d'une telle fonction peut avoir sa place lors d'une recherche commune guidée ou dans le cadre d'un

devoir à la maison : chaque élève a alors la possibilité de garder une vision globale de l'étude en cours. On peut, par contre, s'interroger sur sa place dans le cadre d'un devoir surveillé, en raison de l'accumulation des difficultés calculatoires.
L'étude de g et h, facile à motiver par la recherche du comportement du produit et de la somme de deux fonctions bien connues, évite les pièges de calculs compliqués et trouve toute sa place lors d'une évaluation.

Formation générale et/ou préparation à l'examen

L'enseignement de la classe terminale ne se réduit pas à la préparation de l'examen du baccalauréat : nous le rappelons ici avec force. L'objectif est la formation des élèves : une formation aussi complète et solide que possible, dans un cadre établi par le législateur et préparant l'avenir tant de l'individu qui reçoit cette formation que de la société qui l'a définie. De nombreux aspects de cette formation sont difficiles à prendre en compte lors de l'examen final du baccalauréat ; ils ne sont pas pour autant à négliger.
Dans la pratique, l'examen du baccalauréat motive fortement un grand nombre d'élèves en donnant une échéance visible à leur travail scolaire. Il paraît donc judicieux, en dépit de ses aspects inévitablement codifiés, d'en user comme d'un levier pour le travail intellectuel. L'art de l'enseignant reste, comme par le passé, de résoudre des oppositions, de parfois contraindre pour ensuite convaincre ou tout au moins obtenir l'adhésion, de conjuguer au mieux l'entraînement à une épreuve clairement identifiée et le développement harmonieux de capacités intellectuelles.
« Faire » des problèmes de baccalauréat demeure un entraînement naturel, qu'on ne saurait éliminer ; travailler sur des annales permet de se situer par rapport à cette épreuve. Les contraintes de l'examen national conduisent souvent à des énoncés amputés de tout aspect heuristique : ces énoncés n'aident pas à comprendre le sens des mathématiques. Durant l'année, on n'hésitera pas à en réécrire certains pour en relever l'intérêt mathématique.

Quel enseignement mathématique dans la série ES ?

Deux orientations essentielles sont fixées par le programme à l'enseignement des mathématiques en série ES : « entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement » et « initiation à la pratique d'une démarche scientifique globale ».

Entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement

Savoir lire l'information suppose de maîtriser quelques outils de base : les élèves doivent connaître ces outils, comprendre leur pertinence et leur efficacité pour répondre aux questions posées. La plupart des notions au programme relèvent de cette ambition : calcul intégral et nouvelles fonctions, ajustement linéaire par moindres carrés, lois de probabilité et conditionnement, graphes et suites… toutes ces notions permettront aux élèves de cette série d'aborder une lecture puis un traitement scientifique de l'information à laquelle ils seront par la suite confrontés.
Il ne s'agit pas, en terminale, de laisser les élèves seuls face à une information brute ; les questions à poser puis l'interprétation des réponses relèvent le plus souvent de domaines extérieurs aux mathématiques : on pourra sur ce sujet mener avec profit un travail conjoint avec d'autres disciplines (sciences économiques et sociales, histoire et géographie en particulier). En l'absence d'un tel travail, on en restera à un questionnement de type mathématique.
L'exemple que l'on trouvera plus loin relatif au calcul de l'impôt relève d'une autre problématique : l'information de départ est donnée en termes mathématiques ; le professeur de mathématiques est donc tout à fait dans son rôle en aidant les élèves à décoder et comprendre cette information.

Initiation à la pratique d'une démarche scientifique

De nombreux éléments participent à la définition de ce que l'on appelle « une démarche scientifique ». On mettra plus particulièrement en avant les trois aspects suivants :

Expérimenter

Contrairement à une opinion fortement répandue, les mathématiques comportent une dimension expérimentale qu'il convient de valoriser auprès des élèves. Cette expérimentation sera avant tout graphique et numérique. Elle pourra précéder la mise en place de certains résultats.

> Ainsi, l'observation du graphe de la fonction logarithme, avec sa pente de moins en moins forte quand x croît, amène à comparer $\ln x$ et $\sqrt{x}$; d'où l'on déduit la règle de comparaison de $\ln x$ et x.

Elle pourra aider à retrouver certains résultats.

> Ainsi de la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en 0 : une expérimentation numérique avec $x = 10^{-6}$ par exemple donne la valeur $-6\ln 10 \times 10^{6}$. Cela suggère une limite égale à $-\infty$; la mise sous la forme $\ln x \times \frac{1}{x}$ permet ensuite de conclure avec les règles opératoires du cours.

On incitera donc les élèves à se confronter régulièrement au numérique : ils y acquerront une habitude des nombres et des ordres de grandeur précieuse pour la suite de leurs études, ainsi qu'un support à l'abstraction indispensable pour beaucoup d'entre eux.

On donnera à ces phases expérimentales la place qui leur revient. Expérimenter rend plausible un résultat, mais ne le démontre pas : on peut conjecturer que la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (dont on ne sait au départ si elle existe) est finie. Cette distinction entre le plausible et le démontré est fondamentale, mais elle ne prend tout son sens qu'avec un exemple où une expérimentation numérique rend plausible un résultat faux.

Démontrer

Il importe que les élèves aient compris le rôle caractéristique de la démonstration en mathématiques : on repèrera quelques endroits du cours où ce rôle sera mis en avant (propriétés du logarithme ou de l'exponentielle par exemple). Mais on n'oubliera pas que la démonstration est toujours un compromis ; le souci de démontrer le cédera parfois devant le souci d'expliquer.

> La mise en place de la relation fonctionnelle de la fonction logarithme peut se faire de façon analytique ou de façon géométrique : cette seconde méthode, évoquée plus bas, amène à privilégier un point de vue explicatif particulièrement convaincant; il serait dommage de le refuser parce qu'il ne se prête pas à une formalisation rigoureuse à ce niveau. Une fois cette relation établie, on peut alors démontrer avec rigueur les propriétés qui s'en déduisent.
> On expliquera de même le lien entre la moyenne empirique et l'espérance mathématique, sans se préoccuper du mode de convergence en jeu : quand les f_i « tendent » vers les p_i, la moyenne $\sum_i f_i x_i$ « tend » vers l'espérance $\sum_i p_i x_i$.

Communiquer

Il s'agit ici avant tout de rendre les élèves capables de produire un texte clair, précis et logiquement articulé. Ils s'entraîneront à contrôler la cohérence et la logique de leur propos : corriger une contradiction flagrante (par exemple entre une flèche montante dans un tableau de variations et une limite égale à $-\infty$), repérer l'argument fondamental ou l'étape clé d'un raisonnement sont ici des compétences fondamentales.

Le travail fait en mathématiques aide à la maîtrise de la langue française et on évitera les lignes de calcul sans aucune explication ; on entraînera les élèves à user correctement de liens de langage *(car, or, d'où, donc, on en déduit que, il s'ensuit que…)* qui éclairent la logique du discours tenu.

Organisation du travail des élèves

Le programme n'impose aucune progression pédagogique. Il n'est pas écrit de façon linéaire : on ne peut donc pas bâtir un cours en partant de la première ligne du programme et en continuant jusqu'à la dernière.
Des indications globales de durée sont données pour chacun des deux grands titres : environ 18 semaines pour l'analyse et 12 semaines pour la statistique et les probabilités.
Rappelons, comme cela a déjà été fait dans le document de première, que l'efficacité de l'enseignement est à optimiser en jouant sur les divers temps du travail des élèves, en classe entière ou en travail personnel : les autres paragraphes de ce document, ainsi que le paragraphe 3 du programme de première, donnent des pistes pour adapter des activités à ces divers temps.

Analyse

Fonctions numériques

Les fonctions que les élèves de terminale ES sont susceptibles de rencontrer sont continues par morceaux, et même, le plus souvent, continues. L'aspect graphique est à privilégier puisque l'une des idées qui président à l'élaboration du programme est « l'entraînement à la lecture active de l'information et à son traitement », et que l'interprétation raisonnée d'un graphique fait partie de cet entraînement. On pourra donc s'appuyer sur une conception intuitive de la continuité, comme celle qui consiste à dire qu'une fonction est continue quand on peut tracer son graphe sans lever le crayon. Cela étant, il est souhaitable de faire comprendre aux élèves que cette approche atteint très rapidement ses limites : d'une part, le tracé du graphe d'une fonction est *en fait* impraticable, sinon pour des fonctions très simples et sur des intervalles assez petits (comment envisager, par exemple, un graphe lisible de la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[-20, 20]$?) ; d'autre part, les fonctions de plusieurs variables (que de nombreux élèves utiliseront dans la suite de leurs études) ne se prêtent absolument pas à cette approche puisque leur graphe se trouve dans un espace de dimension supérieure à deux. Ces obstacles, sur lesquels il ne faut pas trop insister, permettront d'attirer l'attention sur le fait que cette description graphique de la continuité n'est pas une définition mathématique et qu'on aurait besoin de mieux pour aller plus loin.
Les élèves peuvent éprouver des difficultés à saisir la définition d'une fonction lorsque celle-ci possède une expression analytique différente sur divers intervalles. Il est pourtant essentiel qu'ils comprennent que ce peut être le cas des fonctions les plus concrètes.

Exemple : L'impôt sur le revenu en France, en 2001

Une personne seule, sans autre revenu que son salaire et ne disposant pas d'éléments menant à une réduction d'impôts, peut calculer l'impôt sur son revenu annuel net imposable à partir du tableau suivant.

Tranche de revenu (en euros)	Impôts (s = salaire annuel)
]0 ; 4121]	0
]4121 ; 8104]	0,075 s - 309,08
]8104 ; 14264]	0,21 s - 1 403,12
]14264 ; 23096]	0,31 s - 2 829,52
]23096 ; 37579]	0,41 s - 5 139,12
]37579 ; 46343]	0,4675 s - 7 299,91
>46343	0,5275 s - 10 080,49

Les questions ci-dessous peuvent être posées aux élèves afin de les amener à comprendre ce tableau.
1) Est-il juste de dire, pour un salaire annuel de 18 000 €, que les impôts se décomposent ainsi :
Il n'y a pas d'impôts sur les premiers 4 121 €, l'impôt est de 7,5 % sur les 3 983 € suivants, puis de 21 % sur les 6 160 € suivants, puis de 31 % sur le reste.
2) On propose à quelqu'un gagnant annuellement 46 000 € une augmentation de son salaire annuel de 500 €. De quelle augmentation bénéficiera-t-il après déduction de l'impôt ?

On appelle taux marginal d'imposition, à un niveau s de salaire, l'augmentation d'impôt due à une augmentation de 1 € du salaire. Déterminer la fonction qui à un salaire s associe le taux marginal.

3) Quel est le plus petit salaire tel que le pourcentage du salaire prélevé par l'impôt sur le revenu total soit supérieur à 30 % ? Ce pourcentage peut-il dépasser 50 % ?

4) Dupond dit à Dupont :

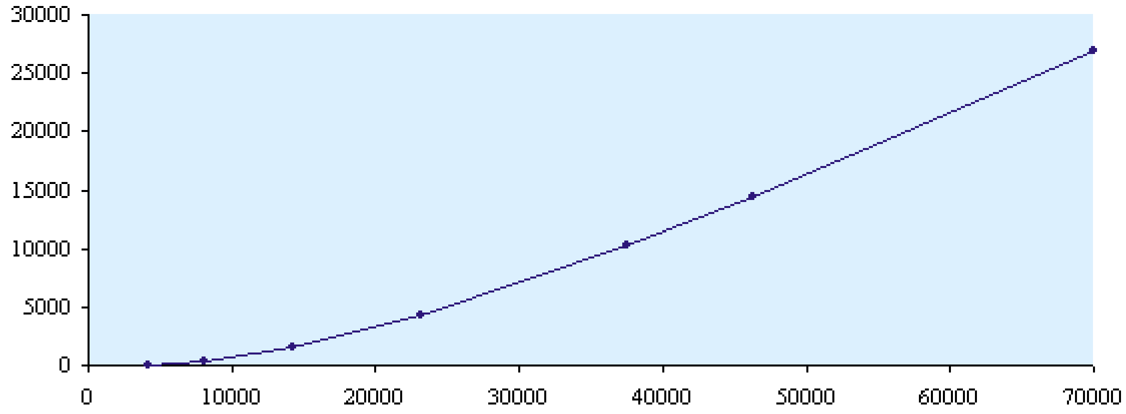
« Mon salaire est supérieur au tien, mais après déduction des impôts, je gagne finalement moins. »

Réponse de Dupont : « C'est impossible, le salaire impôt déduit est une fonction croissante du salaire initial. » Qu'en pensez-vous ? (On pourra définir la fonction g qui à un salaire mensuel s fait correspondre le salaire qui reste après déduction des impôts et tracer sa courbe représentative pour s compris entre 0 et 70 000 €.)

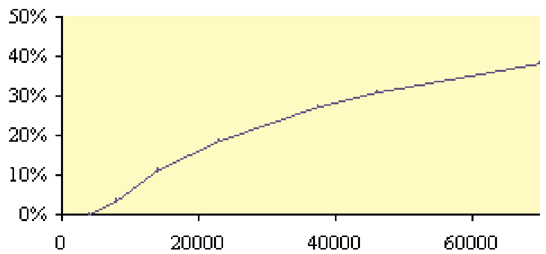
5) Tracer la courbe donnant le pourcentage du salaire qui est donné aux impôts, pour un salaire annuel entre 0 et 30 000 €.

6) Soit $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 4121\ldots$, $\alpha_7 = 46343$ et $\alpha_8 = 10^{99}$, $t_1 = 0$, $t_2 = 0{,}075\ldots$, $t_7 = 0{,}5275$ et $d_k = t_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k)$. La formule suivante donnant l'impôt d payé pour un salaire s situé dans la tranche $T_i =]\,\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ est-elle correcte ?

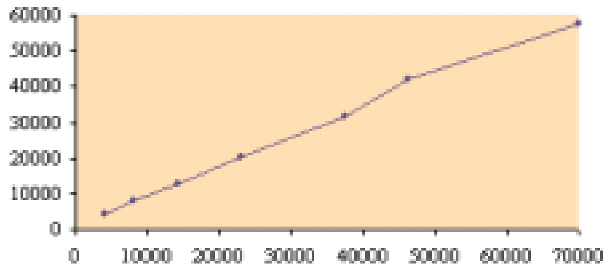
$d = t_i(s - \alpha_i) + d_1 + \ldots + d_{i-1}$



impôt en fonction du revenu net imposable



variation du taux global d'imposition en fonction du revenu net imposable



revenu impôt déduit en fonction du revenu net imposable

Limites

Le concept de limite pourra lui aussi être abordé de façon intuitive et expérimentale, par l'utilisation de la calculatrice ou du tableur. Il est cependant important que les élèves comprennent la motivation essentielle du concept à ce niveau, à savoir la définition de la dérivée en un point comme limite des accroissements moyens et son interprétation géométrique qui fait apparaître la tangente comme « limite » des sécantes. Il est clair que les élèves seront amenés à étudier des fonctions à l'aide de leur tableau de variation, et il faut qu'ils comprennent alors ce qu'ils font, et pourquoi. L'accroissement relatif est une notion qu'ils doivent mettre en relation avec la notion familière de pourcentage ; pour éviter une confusion possible avec les fréquences et les probabilités, il convient de leur rappeler qu'un pourcentage peut être supérieur à 100 %, comme dans le cas d'une inflation galopante, et peut également être négatif.

Certaines situations pourront conduire à l'étude de limites non triviales.

Ainsi, un travail sur les intérêts composés amènera naturellement à étudier la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Cette étude pourra faire l'objet d'un travail expérimental sur la calculatrice et la démonstration du résultat illustre un usage de la dérivabilité des fonctions nouvelles que les élèves rencontrent.

D'un point de vue historique, il est vraisemblable qu'il s'agisse là de la plus ancienne estimation de limite sans motivation géométrique. En effet, lorsqu'un capital de C unités monétaires est investi à un taux x % par unité de temps, lorsque les intérêts sont capitalisés, c'est-à-dire incorporés au capital, n fois par unité de temps au taux $\frac{x}{n}$ dit « taux proportionnel », il vaut après une unité de temps $C\left(1+\frac{x}{100n}\right)^n$.

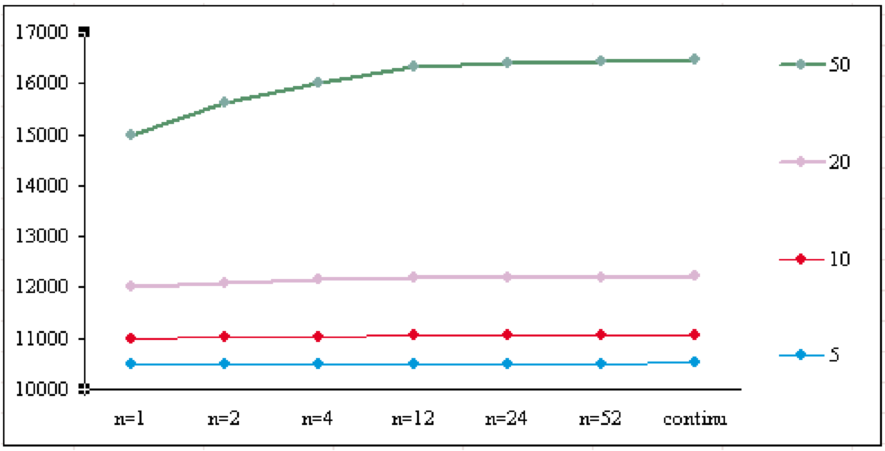
Une étude plus précise de la fonction ln permet de montrer que la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ est croissante, ce qui s'interprète simplement en termes d'intérêts composés par le fait qu'il est avantageux pour l'investisseur (ou le prêteur) de composer aussi souvent que possible les intérêts. Que se passe-t-il à la limite, c'est-à-dire en capitalisant « en continu » : le capital devient-il infini ? Les mathématiques sont là pour montrer que la valeur limite est $Ce^{\frac{x}{100}}$. Après t unités de temps, avec n capitalisations par unité de temps, le capital remboursé est $C_n(t) = C\left(1+\frac{x}{100n}\right)^{nt}$. Lorsque les intérêts sont continûment composés, c'est-à-dire capitalisés à chaque instant, on trouve un capital limite $C(t) = Ce^{\frac{tx}{100}}$.

La position du graphe de l'exponentielle au-dessus de sa tangente en 0 illustre le fait que les intérêts simples sont moins avantageux pour l'investisseur que les intérêts composés.

Illustration numérique : On place 10 000 € à un taux x pendant un an, capitalisés n fois ou « en continu ».

(Les valeurs choisies pour n correspondent à des capitalisations par semestre, par trimestre, par mois, par quinzaine – les 1 et 16 du mois – ou par semaine.)

	x=5	x=10	x=20	x=50
n=1	10500	11000	12000	15000
n=2	10506,25	11025	12100	15625
n=4	10509,45	11038,13	12155,06	16018,07
n=12	10511,62	11047,13	12193,91	16320,94
n=24	10512,16	11049,41	12203,91	16402,73
n=52	10512,46	11050,65	12209,34	16447,88
continu	10512,71	11051,71	12214,03	16487,21



Remarque – Il est vraisemblable (bien que les textes manquent) que les banquiers, autour de l'an 1600, ont été amenés à calculer des intérêts composés sur des périodes très courtes (quotidiennement, peut-être), mais ils n'ont très probablement pas été jusqu'à considérer une limite en notre sens.

Dans les calculs ci-dessus, on prend un taux $\frac{x}{n}$ lorsqu'on capitalise n fois par unités de temps. Mais aujourd'hui, dans les banques, on ne prend pas un taux $\frac{x}{n}$ mais un taux y, dit « taux actuariel » tel que :

$$\left(1+\frac{y}{100}\right)^n = 1+\frac{x}{100}\text{, soit } y = 100\left(\left(1+\frac{x}{100}\right)^{1/n} - 1\right).$$

On pourra faire remarquer et illustrer graphiquement que pour des petites valeurs de x, le taux actuariel y est proche de $\frac{x}{n}$.

Dérivées et primitives

Il est essentiel que les élèves puissent calculer rapidement (et sans recours à un formulaire !) les dérivées des fonctions simples, en utilisant si nécessaire la dérivation de la composée de deux fonctions. Cela leur permettra de reconnaître des dérivées et par conséquent de calculer des primitives. Ils pourront aussi constater (sur des exemples comme $1/(1 + x^2)$ ou $1/x$) que la « primitivation » est moins simple que la dérivation, ce qui peut être une occasion d'insister sur le caractère non réversible de certains algorithmes (certes, on peut marcher ou courir à reculons, mais on le fait moins facilement).

Les fonctions logarithme et exponentielle sont les nouveaux objets les plus importants que les élèves découvrent en terminale ES. Il n'est pas immédiat de comprendre le rôle central du nombre e, et il est peut-être souhaitable d'évoquer π, l'autre constante numérique que les élèves connaissent depuis longtemps, et de leur faire comprendre que ces deux nombres s'imposent à nous.

La fonction logarithme pourra être introduite par intégration de la fonction $\frac{1}{x}$. Une méthode géométrique simple établit, sans recours à un changement de variable, que la primitive F de la fonction $\frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 satisfait la formule fondamentale $F(ab) = F(a) + F(b)$ pour tous les réels positifs a et b (voir le document d'accompagnement de l'option de première et terminale L, p. 18-19). Cette propriété justifie l'importance accordée à cette fonction ; on la notera désormais ln. On montrera que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (on pourra par exemple, inspiré par une première représentation de ln, montrer que $\ln x$ est majorée par $\sqrt{x}$ puis que $\frac{\ln x}{x}$ est majorée par $\frac{1}{\sqrt{x}}$).

La fonction e^x est alors obtenue comme fonction réciproque de la fonction logarithme et la formule de dérivation des fonctions composées permet de calculer la dérivée de la fonction exponentielle. On définit alors, toujours par composition, l'expression $a^b = e^{b\ln(a)}$ où a est réel positif et b réel arbitraire, puis on remarque que cette fonction interpole les suites géométriques, ce qui justifie les notations du type $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ bien utiles dans les questions de dérivation et d'intégration. La limite de $\frac{\ln x}{x}$ à l'infini permet d'établir facilement les autres règles opératoires sur les limites.

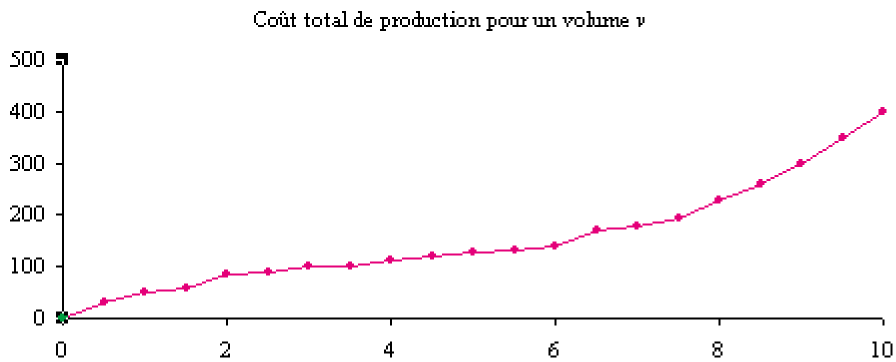
Les calculs d'aires, importants dans toute société agricole, sont aussi anciens que les mathématiques. Ils ont été théorisés par les mathématiciens grecs : ainsi, la quadrature du rectangle revient à l'obtention d'une racine carrée, cependant que la quadrature du cercle est équivalente à la construction de deux longueurs qui sont dans le rapport π. Il faut attendre le XVII^e^ siècle pour que le lien soit établi, par Newton et Leibniz, entre le calcul des tangentes et celui des aires, donc dans notre langage entre le calcul différentiel et le calcul intégral, et le XXe siècle pour que le rôle de l'intégrale en probabilités soit pleinement reconnu (la relation entre probabilités et intégrale n'est pas au programme de terminale ES). Mais les élèves sont en mesure de comprendre le lien entre l'intégration et le calcul des primitives qu'elle motive, et de voir sur des exemples que l'aire sous une courbe, tout comme la valeur d'une fonction, peut représenter une grandeur. Les fonctions à intégrer seront continues par morceaux et monotones. Le choix du programme consiste à se limiter aux fonctions positives dans les calculs d'aire (les exercices nécessitant de soustraire des aires ne devront donc pas poser de problèmes de signes). On pourra approcher l'aire limitée par le graphe d'une fonction croissante continue, l'axe des abscisses et deux droites verticales par la méthode des rectangles ; une expérimentation à la calculatrice ou sur tableur conduite sur un exemple (tel ln2) pourra illustrer cette approche.

Étant donnée une fonction croissante continue, on peut faire comprendre que f est la dérivée de la fonction aire en revenant à la définition de la dérivée et par encadrement entre deux rectangles. Cette fonction aire, notée à l'aide du symbole $\int$, est donc une primitive F de f, et on a alors $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ pour cette primitive, et donc pour toute primitive de f puisqu'elles ne diffèrent que d'une constante additive. On peut alors énoncer (sans le démontrer) que ce résultat s'étend à toute fonction continue. Le calcul d'aires, intuitivement possible lorsqu'elles sont limitées par des graphes de fonctions continues, implique donc un résultat moins attendu, à savoir que toute fonction continue est une dérivée, et donc admet une primitive. On pourra faire remarquer que cette approche théorique ne fournit pas de méthode de calcul effectif de primitive, et qu'il s'agit là d'un vrai problème. Une fois établi le lien entre primitive et intégrale, la linéarité de l'opération de dérivation (la dérivée d'une somme est la somme des dérivées) induit la linéarité de l'intégrale, qui n'est géométriquement claire que pour des fonctions en escalier.

Coût marginal

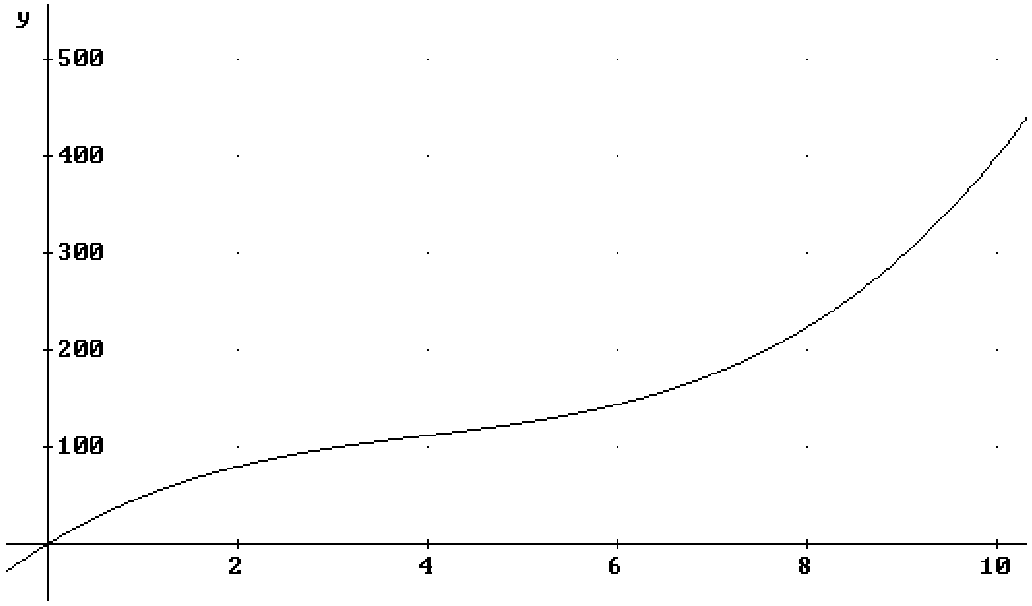
L'exemple ci-dessous illustre comment un concept (le coût marginal) utilisé dans le champ de l'économie peut s'appréhender à travers un concept mathématique (la dérivée).

> Une industrie pharmaceutique possède une machine capable de produire au maximum 10 litres par jour d'un certain médicament présenté sous forme de sirop. Pour arriver à ce résultat, la machine doit tourner à son régime maximal 24 heures sur 24. Désignons par v le volume du médicament qu'elle produit effectivement, le nombre v étant fixé pour répondre à la demande des clients. On a évidemment $v \leqslant 10$.
> Interrogeons-nous maintenant sur le coût de production du médicament : ce coût est une donnée importante pour fixer le prix de vente. Désignons par C(v) le coût total de production du volume v. La figure ci-dessous donne un exemple d'une telle fonction.



Si le coût de production était proportionnel au volume produit, le graphe de la fonction serait une ligne droite passant par l'origine des coordonnées. Tel n'est pas le cas. En effet, la « pente » du graphe commence par diminuer au fur et à mesure que le volume augmente. Ceci veut dire que les premiers centilitres produits coûtent plus cher que les suivants. Un tel phénomène peut s'expliquer de diverses façons selon les cas : par exemple, la machine peut requérir une mise au point particulière au démarrage, mise au point qui intervient dans le coût des premiers centilitres produits, alors qu'une fois en régime, elle nécessite moins de présence humaine.
Par contre, au fur et à mesure qu'un plus grand volume de médicament est produit, la pente de la courbe s'accroît. Ceci veut dire que les derniers centilitres produits coûtent plus cher que les précédents. Ici aussi, diverses explications sont possibles : par exemple, pour dépasser une certaine production, il faut payer des techniciens au tarif des heures supplémentaires. Tant que le prix du centilitre produit diminue avec le volume total v, l'industriel a avantage à augmenter la production, puisque, à prix de vente constant, sa marge bénéficiaire augmente. Cependant, quand le prix du centilitre produit augmente, la marge bénéficiaire diminue. On voit pourquoi il est intéressant d'estimer, pour chaque valeur du volume produit, le prix que va coûter le centilitre supplémentaire produit au-delà de ce volume.
Pour cerner cette question mathématiquement, donnons-nous une expression algébrique de la fonction $C(v)$. La courbe de la figure ci-dessous représente la fonction C définie par :

$$C(v) = v^3 - 12v^2 + 60v, \text{ lorsque } 0 \leqslant v \leqslant 10.$$



Remarques
– De nombreuses fonctions de coût présentent cette allure : croissance rapide au début, plus lente ensuite et de nouveau croissance plus rapide. Les fonctions polynomiales sont les fonctions les plus simples pouvant avoir cette allure : c'est pourquoi dans de nombreuses situations très simplifiées, comme celle-ci, on prend pour fonction coût un polynôme du troisième degré.
– On notera que la fonction C est toujours à considérer sur un intervalle borné.
Partons d'un volume v. Un accroissement Δv du volume produit, au-delà de v, coûtera $C(v + \Delta v) - C(v)$.
Mais il est plus clair de se référer au coût moyen par unité de volume supplémentaire produit. Ce coût a pour expression :

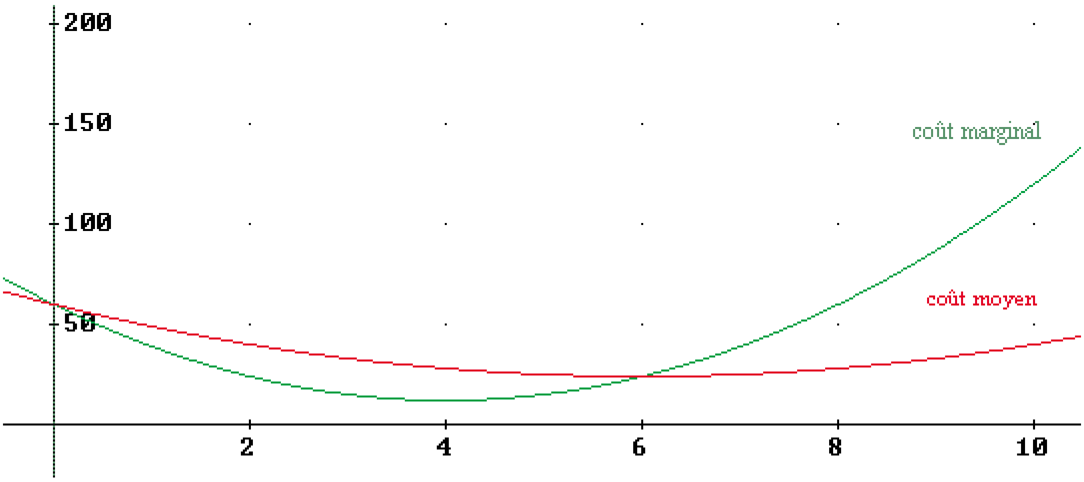
$$\frac{C(v+\Delta v)-C(v)}{\Delta v} \quad (1).$$

Passer à la limite dans cette expression conduit à la dérivée $C'(v)$.

Mais pourquoi utiliser la dérivée ? N'est-elle pas un concept trop évolué pour traiter d'une question aussi simple ? La réponse est double : premièrement, le passage à la dérivée nous libère du choix, en fait arbitraire, de la quantité Δv ; deuxièmement, calculer la valeur de l'expression (1) pour un Δv donné et pour diverses valeurs de v est un calcul numérique ennuyeux, alors que calculer algébriquement la dérivée de la fonction C est une chose toute simple, et qu'une fois cette dérivée calculée, on peut en obtenir commodément des expressions numériques et graphiques.
La dérivée a pour expression : $C'(v) = 3v^2 - 24v + 60$.
La dérivée s'appelle « coût marginal » du produit considéré. Revenons maintenant au point de vue de l'industriel.
La donnée de base qui lui permet d'établir le prix de vente n'est bien entendu pas le coût marginal, mais bien le coût moyen de l'unité produite. Ce coût s'exprime comme suit :

$$M(v) = \frac{C(v)}{v} = v^2 - 12v + 60 .$$

Les deux courbes, celle du coût marginal et celle du coût moyen, sont présentées ensemble sur la figure ci-après. On lit sur cette figure que le coût moyen passe par un minimum lorsque le coût marginal est égal au coût moyen, ce qui est assez clair si on y réfléchit quelque peu : en effet, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est inférieur au coût moyen calculé jusque-là, le coût moyen diminue nécessairement ; et inversement, lorsque le coût d'une unité supplémentaire produite est plus grand que le coût moyen, celui-ci augmente.



Il est important que ces considérations heuristiques soient traduites en propriétés que l'on peut démontrer à l'intérieur du modèle choisi (faute de quoi, il conviendrait de s'interroger sur le bien-fondé des concepts introduits pour modéliser la situation en jeu).

Cherchons donc le minimum du coût moyen. La dérivée de ce coût s'écrit :

$$M'(v) = \frac{1}{v}\left(C'(v) - M(v)\right).$$

Ceci montre que $M(v)$ atteint un extremum lorsque $C'(v) = M(v)$, qui est dans notre cas un minimum.
Ce que nous venons de faire mérite un commentaire général. On peut en effet se demander si ce n'est pas mobiliser des instruments conceptuels trop évolués que de mettre en forme algébrique une fonction de coût et ensuite de la dériver.
L'argument principal nous semble être le suivant : pour quelqu'un qui a un peu l'habitude de l'algèbre et du calcul différentiel, les moyens mathématiques mobilisés

s’avèrent commodes pour exprimer et comprendre les phénomènes en question. Toutefois, ce serait tout autre chose que d’analyser une situation réelle, presque nécessairement compliquée par la présence de facteurs nécessitant d’aménager le modèle idéalement simple sur lequel nous avons tablé.

Les activités présentées dans cette partie sont disponibles sur le cédérom, section « Compléments aux documents d’accompagnement ».